心的回転の数理：不良設定性を有する立体表象の同型性
Mathematical nature of mental rotation: isomorphism between mental objects in an ill-posed problem

日髙 昇平 †, 鳥居 拓馬 ‡, 高橋 康介 ♠
Shohei Hidaka, Takuma Torii, Kohske Takahashi

北陸先端科学技術大学院大学 †, 東京電機大学 ‡, 立命館大学 ♠
Japan Advanced Institute of Sciene and Technology, Tokyo Denki University, Ritsumeikan University

概要

人の心的立体の認知過程を調べる課題の一つとして、二枚一組の画像上の立体の回転合同性を判断する心的回転課題がある。画像上の立体には奥行情報が欠損する不良設定性があるため、無数の可能立体の対を特定する潜在的な計算複雑さがある。しかし、経験的には心的回転の反応時間が立体対の最小回転角に比例するため、認知計算上はそうした対応問題を直接は解いていないと考えられる。本研究は、こうした理論と経験の乖離を解消するため、心的回転の計算論的モデルを提示する。

キーワード：心的回転 **(mental rotation),** 不良設定問題 **(ill-posed problems)**

1. 心的回転課題

心的回転課題 (Shepard & Metzler, 1971) は、人の心的表象の同一性判定や操作に関する認知過程を調べる課題として用いられてきた。典型的な心的回転課題は、１対の静止画としてある同一あるいは異なる立体像から得られる 2 枚の平面画像を提示し、その対になった画像が回転して同一の立体であるかを回答する課題である。心的回転課題に関する古典的な知見 (Shepard & Metzler, 1971) として、十分に訓練された参加者が、同一の立体像の 1 組の射影を与えられたときの回答時間は、一方を他方に一致させるための最小回転量に比例することが知られている。この結果は、心の中の立体像を回転させる”心的回転”の根拠とされている。

2. 不良設定性を有する立体の心的操作

心的回転課題の論理は明確に思える。我々は１組２枚の静止画それぞれに対して心的な立体像をつくり、その立体像の一つを回転させ、もう一つの立体像へ最も近い形になるよう操作する。しかるに、そうした心的な情報処理に習熟した場合にでも最小必要な操作として、最小回転角があり、それが主な情報処理にかかる時間的コストとして反映されるのだ。

しかし、よく知られた事実として、平面上の１枚の静止画だけでは、一般に立体の構造は完全には決まらない。立体構造を 3 次元空間上の配置として捉えれば、3 次元空間の点群が与えられれば、そのある平面への射影は一意に決まる（順問題）。一方、その逆に、その平面上の点群の配置情報が得られたとしても、元の 3 次元空間上の点群の配置は一つには決まらない（逆問題）。このように解が一意に決まらない問題を不良設定問題という (Marr, 1982).

心的回転課題で用いられる一対二枚の静止画は、それぞれ単体としては、一般的な不良設定問題の一種だと考えることができる。すなわち、１枚の静止画に対応しうる可能な立体像は無数に存在する。従って、心的回転で本来すべき情報処理は、前述した”単純な回転処理のみ”ではないことが明らかである (図 1)。

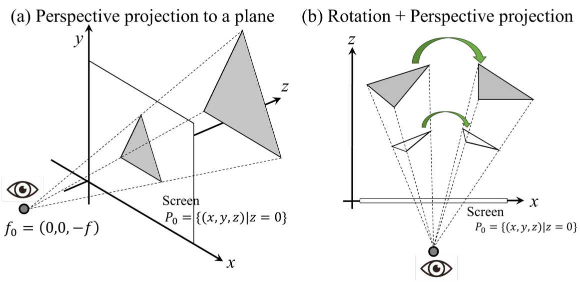

図 1 (a) 3 次元空間上の平面への透視射影 (2 次元射影空間) をみて，(b)3 次元回転により合同となる立体を同定する課題。射影により不良設定性が生じるため、どの可能立体をどの可能立体が回転して合同となるか特定するマッチング問題が発生する.

つまり、不良設定性をもつ立体を回転させて同一性を判定するのに、必要だと想定される計算は以下のようなものだろう。１枚の静止画に対応しうる可能立体 A を選び、それを心的に回転させ、もう１枚の静止画に対応しうる可能立体のうち最も A に近いものを選ぶ。A と同一であると結論づけられる場合にはそれで計算終了だが、そうでない場合は、そもそも可能立体 A の選び方が良くなかった可能性があるため、再度１

枚の静止画に対応しうる可能立体を選びなおし、この立体の同一性判定の計算を行う。”同一”と結論づけられるか、一定時間に到達するまで、この計算を繰り返す。

このような計算手続きは、まず古典的な心的回転課題で暗に想定されているよりもはるかに複雑である。ある平面画像に対応しうる立体は無数にあるため、単純な数え上げではそもそも計算が有限時間で終了する保証がない。さらに、2 枚の静止画それぞれ独立に異なる立体を選んで一致させる必要があるため、二重に入れ子になった立体対を選ぶ処理が必要になる。こう考えると、むしろ回転操作は小さな問題であり、1 対の不良設定性を有する立体のマッチングに大きな計算量がかかるはずではないかとすら思えてくる。

3. 定式化：平面射影上の回転合同

しかし、少なくとも主観的には、心的回転課題に回答するために、そのような立体の選定・マッチング・検索などを主とした情報処理しているようには思いにくい。またすでに示されている通り、反応時間が回転角と比例するため、主な情報処理は回転に充てられていると考えるのが妥当であろう。従って、理論的に要求されるはずの情報処理が、実際の認知処理ではほぼ消えているように見える、という矛盾が生じることになる。

この矛盾を解消するには、不良設定性を有する立体の回転合同性が効率的に処理可能であることを示す必要がある。この点について具体的に議論をするために、以下のように問題を定式化する。

d 次元上の n 個の点群を行列 $X \in \mathbb{R}^{d\times n}$ で表し、これを一つの立体の頂点座標の組と同一視する。n 個の頂点をもつ 3 次元立体 2 つがそれぞれ行列 $\overline{X}, \overline{Y} \in \mathbb{R}^{3\times n}$ で表されたと考えよう。この 3 次元点群からある射影により得られた平面上の点群を $X, Y \in \mathbb{R}^{2\times n}$ とする。

一般に 3 次元空間から平面への透視射影は射影幾何によって与えられる。3 次元上の透視射影の一例として、平面 $P_0 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 0\}$ への以下の射影がある：

$$q_f : \mathbb{R}^3 \ni x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \frac{f}{f + x_3} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2. \tag{1}$$

この射影は、3 次元上で点 $f_0 := (0, 0, -f)$ を通る各直線を“点”とみなす射影幾何を与えている (図 1(a))。すなわち 2 次元射影幾何の各点は直線 $l_{x,f_0} := \{cx + (1-c)f_0 \in \mathbb{R}^3 \mid c \in \mathbb{R}\}$ で, その直線と平面 P_0 との交点が $\frac{f}{f+x_3}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ である。いわゆるスクリーンが平面 P_0 で、焦点が f_0 であるカメラで構成される像が上記の射影である。従って、光線は平面の片側すなわち $x_3 > 0$ を満たすベクトルからのみ発生すると考えるため、平面 P_0 の裏と表の区別がつかないことの問題は生じない。また、焦点距離 f が無限の極限で透視射影と直交射影は一致する $\lim_{f\to\infty} q_f = q$。そのため直交射影は透視射影の特殊な場合と位置付けられる。

透視投影で $\overline{X}, \overline{Y}$ の射影 X, Y が与えられたとき、焦点距離を $f > 0$ として

$$X = \begin{pmatrix} \frac{f\overline{X}_{1,1}}{\overline{X}_{3,1}+f} & \cdots & \frac{f\overline{X}_{1,n}}{\overline{X}_{3,n}+f} \\ \frac{\overline{X}_{2,1}}{\overline{X}_{3,1}+f} & \cdots & \frac{\overline{X}_{2,n}}{\overline{X}_{3,n}+f} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

$$Y = \begin{pmatrix} \frac{f\overline{Y}_{1,1}}{\overline{Y}_{3,1}+f} & \cdots & \frac{f\overline{Y}_{1,n}}{\overline{Y}_{3,n}+f} \\ \frac{f\overline{Y}_{2,1}}{\overline{Y}_{3,1}+f} & \cdots & \frac{f\overline{Y}_{2,n}}{\overline{Y}_{3,n}+f} \end{pmatrix}, \tag{3}$$

で与えられる。

ある直交行列 $K \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ が存在して、2 つの立体 $\overline{X}$, $\overline{Y}$ が以下の関係を満たすとする：

$$\overline{Y} = K\overline{X}. \tag{4}$$

回転は直交変換の一種であるため、回転して一致する２つの立体の場合にもこのような直交行列 K が存在する。このときに、それらの平面射影 X と Y の間にはどのような関係が成り立つ必要があるのだろうか。この問いに対する答えが、不良設定性を有する心的回転において計算すべき構造となる。

4. なぜそれでも回転が主な情報処理か：回転合同の存在条件

結論から言えば、不良設定性を有する心的回転でも、未知数を直接推定する代わりに、以下に示す 1 対の平面射影上の立体が回転合同であるための必要条件を満たすか否かを解くことで判断が可能である。

3 次元空間上で直交変換の下で同型である 2 つの立体 $\overline{X}, \overline{Y} \in \mathbb{R}^{d\times n}$ が存在するとき、その平面射影は以下の条件を満たす。3 次元回転を特徴づける角度パラメタ $(\eta, \mu, \lambda) \in [0, 2\pi)^3$ と鏡映パラメタ $\sigma \in \{-1, 1\}$, そして焦点距離 f に対して

$$\begin{aligned} & f \sin\lambda \left(X^\top \begin{pmatrix} \cos\mu \\ -\sin\mu \end{pmatrix} - Y^\top \begin{pmatrix} \cos\eta \\ \sin\eta \end{pmatrix} \right) \\ & = (1 - \sigma\cos\lambda)\, \mathrm{diag}\left(X^\top V_{\sigma\eta-\mu} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \sigma & 0 \end{pmatrix} Y \right). \end{aligned} \tag{5}$$

ただし $V_\theta := \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ は 2 次の回転行列を表し、$\mathrm{diag} : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^n$ は正方行列の対角成分を成分に持つベクトルを与える写像である.

仮に X, Y が、ある回転同型である $\overline{X}, \overline{Y}$ の射影であった場合、方程式 (5) を解くことで、角度 (η, μ) と鏡映 σ は一意に定まる。σ は鏡映を表すパラメタで $\sigma = 1$ のとき回転のみ、$\sigma = -1$ のとき鏡映を加えた回転を表すため、同じ方程式で鏡映合同も判定可能である。その一方で、焦点距離 f と第三の角度 λ については一意には定まらない。もし X, Y が、どの回転同型である $\overline{X}, \overline{Y}$ の射影でもなかった場合、方程式 (5) は解をもたない。つまり、方程式 (5) は、心的回転課題における立体の同一性を必要十分に与える。

したがって、一つの仮説として、心的回転課題における人の判断に潜在する情報処理は、方程式 (5) を解くような形で行われていると考えることができる。方程式 (5) を解くことでは、必ずしもすべての未知数が求まるわけではない、という点で立体視における不良設定性を反映している。一方で、すべての未知数が求まるわけではないにもかかわらず、方程式に解が存在するか否かを計算することで、元の 3 次元空間上にある立体の間に回転同型性が成り立つか否かを判定できる、という点で経験的な心的回転課題とも整合的である。

5. 実験的な予測

仮に人が心的回転課題で回答する際に、方程式 (5) を解く、あるいはそれに準ずる計算を潜在的を行っていると仮説を立てると、その仮説はいくつかの興味深い予測を与える。

1. 3 次元回転を構成する 3 つの角度成分 (μ, η, λ) のうち、1 つの成分 λ に関して焦点距離 f を適切に調整すれば方程式は実質的に独立である。つまり、いくら回転をしても回答に影響しない回転方向が存在する。
2. 複数の試行間で焦点距離 f が一定である、などの隠れた前提条件がある場合、前述の独立性が崩れ、λ を含めて推定可能になる。したがって前述の条件に該当しない場合には、焦点距離に関するメタな情報を学習していると考えられる。

こうした予測を大会発表時までに実験的に検討し、結果を報告する。

謝辞

本研究は科研費基盤研究 B（一般）JP23H0369, 挑戦的研究（萌芽）JP22K19790, および JST さきがけ JPMJPR20C9 の助成を受けて行われました.

文　献

Shepard, R. N., & Metzler, J. (1971). Mental rotation of three-dimensional objects. *Science*, 171(3972), 701-703.

Marr, David (1982). Vision. W. H. Freeman.