

確率加重関数は更新されるのか

——ベイズ統計モデリングによる経験的意思決定モデルの検証——

Does the probability weighting function change over time? :

An investigation using an empirical decision-making model based on Bayesian statistical modeling

星野 匠映[†], 清水 裕士[‡]

Shoei Hoshino, Hiroshi Simizu

[†] 関西学院大学, [‡] 関西学院大学

Kwansei Gakuin University, Kwansei Gakuin University

hrj45742@kwansei.ac.jp

概要

本研究では、非定常環境下の経験的意思決定を対象に、忘却ベイズ推論モデルと動的プロスペクト理論に基づいたモデルを構築した。実験では、参加者が報酬確率の変動する二択課題を繰り返し行い、その選択データを基にモデル比較を行った。その結果、直近の経験を重視する忘却ベイズ推論モデルが支持され、さらに経験によってリスク回避的なバイアスが低減し、ベイズ合理的な選択傾向へと変化する可能性が示唆された。

キーワード：経験的意思決定、ベイズ推論、CPT

1. はじめに

1.1. 経験的意思決定

人が経験に基づいて行う意思決定は経験的意思決定 (decisions from experience, DfE) と呼ばれる。一方で、記述情報に基づいて行う意思決定は記述的意思決定 (decisions from description, DfD) とされ、心理学や経済学分野において豊富に研究が蓄積されてきた。しかし、この2つの意思決定の間には系統的な不一致 (Description-Experience Gap, DE-gap) があり、DfEを理解するために、DfD研究における意思決定理論を拡張することが求められる。

ただし、これまでのDfE研究は選択肢の報酬額や報酬生起確率を固定した定常環境における学習を想定しているが、非定常性は現実の重要な特徴の1つとして注目されており、意思決定プロセスや学習、適応への影響など様々な関心が持たれている (e.g., Konstantinidis et al., 2022)。そのため、本研究では非定常環境下の経験的意思決定を扱う。

DfEを説明する認知モデルや強化学習モデルが提案されているが (e.g., Konstantinidis et al., 2022)、これらは選択行動の予測力は高いものの、人間の意思決定におけるバイアスを説明していない。実際に、DfD研究では確率的な意思決定状況で、経済的な合理性からの一貫した逸脱が示されているが、強化学習モデルは、このようなバイア

スの存在や形成過程を明示的に扱うことができない。そこで、本研究では、DfD研究における確率論的な意思決定理論を拡張し、DfEを説明するモデルを構築する。

1.2. プロスペクト理論

DfD研究で主として扱われる確率的な意思決定理論として、Kahneman & Tversky (1979) が提案したプロスペクト理論 (prospect theory) があり、具体的な価値関数と確率加重関数の数理的表現として累積プロスペクト理論 (cumulative prospect theory; 以下, CPT) が提案されている (Tversky & Kahneman, 1992)。CPTの価値関数は、曲率パラメータ $\beta \in [0, 1]$ を持つ冪関数

$$v(x) = x^\beta \quad (1)$$

であり、効用の低減を表現する。一方で、確率加重関数はリスク回避パラメータ $\gamma \in [0, 1]$ によって、人のリスク回避的な選択傾向を表現している。

しかし、DfE研究では、CPTからの逸脱が多く議論されている。また、DfE研究においてリスク回避選好は変化しないことを想定してきたが、経験を必要としないリスク下の意思決定状況においてもリスク回避選好が経験によって更新されることが示唆されており、動的プロスペクト理論 (dynamic prospect theory; 以下, DPM) が提案されている (Tymula et al., 2023)。

一方で、どのようなメカニズムのもと更新されているかは厳密に議論されておらず、DfE研究の文脈においては検討されていない。このため、DfEにおいてリスク回避的選好の更新を想定することが妥当であるか、また、どのような更新がありえるか検討する必要がある。本研究においては、リスク回避的なバイアスが低減し、ベイズ合理的な意思決定を行うようになるという想定のもとモデルを構築し、妥当性を検討する。

1.3. ベイズ推論モデル

非定常環境下の経験的意思決定において、動的プロスペクト理論を検証するために、ベイズ推論モデルを導入する。DfEにおいて、意思決定者選択のたびに主観確率を更新すると考えることができる。本研究では、Kilka &

Weber (2001) の2段階モデルのアプローチを踏まえ、経験的意思決定を主観確率の更新過程とプロスペクト理論による確率変換を分離した枠組みで説明する。ベイズ推論モデルは、 n を試行数、 $y \in \{0,1\}$ をデータ、主観確率を $\theta \in [0,1]$ とし、交換可能性を仮定すれば、

$$P(\theta|y^n) = \frac{\prod_{i=1}^n P(y_i|\theta)P(\theta)}{P(y^n)} \quad (2)$$

と表され、遠い過去で得たデータと直近で得たデータの影響力は様である。しかし、実際的意思決定は直近の経験に依存していることが示唆されており (Konstantinidis et al., 2022), ベイズ推論モデルは非正常環境下の経験的意思決定を説明できない可能性がある。

2. モデル構築

2.1. 忘却ベイズ推論モデル

ベイズ推論モデルで仮定する標本間の交換可能性を緩め、環境の変動を捉える主観確率の更新過程を考案する。非正常環境において意思決定者は過去の経験を忘れ (forgetting), 直近の経験を重みづけること (recency) によって、適応的な意思決定をすることが示唆されている (Rakow & Miler, 2009; Konstantinidis et al., 2022). そこで、recency を表現可能な忘却ベイズ推論モデル (Forgetting Bayes Inference model) を提案する。

忘却ベイズ推論モデルは、

$$q(\theta|y^t) := \frac{q(\theta) \prod_{i=1}^t q(y_i|\theta)\alpha^{(t-i)}}{q(y^t)} \quad (3)$$

と表現する。 $q(\theta|y^t)$ は、全試行 n における t 試行目の事後分布であり、尤度関数 $q(y_i|\theta)$ に $\alpha^{(t-i)}$ を付与することでベイズ推論モデルを拡張する。パラメータ $\alpha \in [0,1]$ を忘却パラメータとし、現時点 t とデータ y を得た時点 $i \in \{1, \dots, t\}$ の差分をとることで現在と過去の時間的距離によって、尤度が事後分布に与える影響を規定するモデルである。

本研究では、主観確率 θ の事前分布にベータ分布を仮定し、尤度関数にベルヌーイ分布を仮定して、事後分布を解析的に導出し、

$$q(\theta|y^t) = \frac{1}{k_t} \text{Beta}\left(a + \sum y_i \alpha^{(t-i)}, b + \sum (1 - y_i) \alpha^{(t-i)}\right) \quad (4)$$

を得た。 k_t は確率分布の性質を満たすために必要なスケールパラメータである。

事後分布のパラメータを部分的に、

$$A_t = \sum y_i \alpha^{(t-i)} \quad (5)$$

$$B_t = \sum (1 - y_i) \alpha^{(t-i)} \quad (6)$$

と置き換え、 $t+1$ 時点における更新を考えると、

$$A_{t+1} = y_{t+1} + \alpha A_t \quad (5)'$$

$$B_{t+1} = (1 - y_{t+1}) + \alpha B_t \quad (6)'$$

となり、過去の全ての経験を t 時点ごとに忘却パラメータ α で割引き、新たな経験 y_{t+1} によって事後分布のパラメータを更新するという単純なメカニズムとして、主観確率 θ の更新過程を理解することができる。

2.2. 動的プロスペクト理論モデル

DPM モデルにおける確率加重関数は、主観確率の事後分布の EAP (Expected A Posteriori) 推定値 θ_{EAP} を代入して、

$$w_t(\theta_{EAP}) = \frac{\theta_{EAP}^{\gamma_t}}{(\theta_{EAP}^{\gamma_t} + (1 - \theta_{EAP})^{\gamma_t})\left(\frac{1}{\gamma_t}\right)} \quad (7)$$

とし、リスク回避パラメータ γ_t が t 時点ごとに更新されることで、意思決定者の選択傾向が変化することを表現している。ここで、経験的意思決定においてリスク回避的なバイアスが低減し、ベイズ合理性に近づくという仮定を検証するために、 γ_t の更新プロセスを構築する。(7) 式において、完全なベイズ合理性を仮定できるのは、 $\gamma_t = 1$ となるときだけである。したがって、ベイズ合理性に近づく γ_t の更新プロセスは、

$$\gamma_{t+1} = \gamma_t + \phi(1 - \gamma_t) \quad (8)$$

と表現できる。 $\phi \in [0,1]$ を学習率とし、完全なベイズ合理性となる $\gamma_t = 1$ と γ_t の差分を学習するという強化学習のアルゴリズムとして理解できる。

2.3. 意思決定モデル

本研究で提案するモデルは、意思決定者が期待効用にもとづいて確率的に行動選択するとして Luce (1959) の選択公理を仮定した。ある選択枝から確率的に得られる報酬を $x_{i \in \{1,2\}}$ とし($x_1 > x_2$)、 x_1 と x_2 が $w_t(\theta_{EAP})$ と $1 - w_t(\theta_{EAP})$ で重みづけられるとする。ここで、その選択枝の期待効用を $U(x, w_t(\theta_{EAP}))$ とすると、(1) 式の価値関数と (7) 式で得た意思決定の重みを用いて、 $U(x, w_t(\theta_{EAP})) = v(x_1)w_t(\theta_{EAP}) + v(x_2)(1 - w_t(\theta_{EAP}))$ (9) として期待効用を算出できる。

2.4. 不確実性回避選好

選択枝の報酬確率が未知な意思決定状況では、不確実性回避が生じる (Ellsberg, 1961). このため、DfEにおいて、主観確率 θ の事前分布は一般的な形状ではないと考えられる。そこで、不確実性回避選好を反映させた主観確率 θ の事前分布を設定する。

不確実性回避選好はマキシミン期待効用で表現するこ

とができる (Gilboa & Schmeidler, 1989). 本研究で用いるマキシミン期待効用関数は

$$U(x) = \rho x_{\min} + (1 - \rho)\bar{x}. \quad (10)$$

である (Charness & Rabin, 2002). $x_{\min}$ は不確実な選択肢から得られる利得の最小値を表し, $\bar{x}$ は不確実な選択肢の期待値を表す. パラメータ $\rho \in [0,1]$ は不確実性回避選好を示す. 本研究では, 不確実性回避傾向は忘却ベイズ推論モデルの事前分布に反映されると仮定して探索的にモデル構築を行う.

3. 方法

3.1. 参加者

本実験は 2023 年 11 月 8 日から 12 月 8 日までの間に関西の私立大学で行った. 参加者は当該大学に所属する大学生 65 名 (男性 10 名, 女性 54 名, 答えたくない 1 名) で, 平均年齢は 19.46 歳 (範囲 : 18~22 歳) であった.

3.2. 不確実性回避選好測定課題

参加者の不確実性回避選好を推定するために, 二選択課題を行った. 二選択課題の選択肢は, 確実に報酬を得られる確実クジと, 3 つの報酬額のうち確率的に報酬を得られる不確実クジであった. 不確実クジにおいては, 構成する各報酬の確率は示さなかった. 参加者は確実クジと不確実クジを比較し, 好ましいほうを回答した.

各クジの設定として, 不確実クジが 6 パターン, 確実クジが 9 パターンを作成した. 不確実クジと対になる確実クジの額を徐々に低くし, 主観的等価点を調べた.

3.3. 意思決定課題

意思決定課題では, 参加者が繰り返し二選択課題を行い, モデル比較に用いるデータを収集した. 参加者は報酬を最大化するように選択を行い, 選択のたびにフィードバックを得た. 参加者の選択とフィードバックまでを 1 試行とし, 合計で 100 試行とした.

意思決定課題の選択肢対は確実クジと不確実クジで構成した. 確実クジは確実 ($p = 1.00$) に 250 ポイントを得ることができ, 不確実クジは確率的に 500 または 0 ポイントを得ることができた. 非正常環境下の経験的意思決定データを収集するために報酬確率を変動させ, その変動を操作することで 2 つの群を設けた. 増加群では不確実クジで 500 ポイントを獲得できる確率が 0.01 から 1.00 まで試行ごとに 0.01 ずつ増加し, 減少群では 1.00 から 0.01 まで試行ごとに 0.01 ずつ減少した.

参加者には, 選択肢 A (確実クジ) から 250 ポイントを

常に確実に獲得することができると教示した. 一方で, 選択肢 B (不確実クジ) から 500 または 0 ポイントをランダムに獲得でき, 500 ポイントを獲得できる確率は変動する可能性があることを教示した. 選択肢 B (不確実クジ) の初期の報酬確率は教示しなかった.

3.4. 分析方法

本研究では, ベイズ統計モデリングを用いたモデル比較を行った. モデル比較には, 負の対数周辺尤度を用い, ネストモデルを含む計 8 つのモデルを評価した.

モデル比較では, 提案モデルを評価するうえで 3 つの点について着目した. 1 点目は主観確率の更新過程, 2 点目は CPT の確率加重関数の適用可能性, 3 点目は確率加重関数によるバイアスの低減である. この 3 点を評価するため, 全てのモデルで共通の価値関数と事前主観確率を仮定した.

1 点目についてはベイズ推論モデルを仮定した Bayes update model (BUM) と忘却ベイズ推論モデルを仮定した Forgetting bayes update model (FBUM) を比較した. 2 点目については FBUM と, FBUM に CPT の確率加重関数を仮定した Cumulative prospect model (CPM) を比較した. 3 点目については CPM と, FBUM に動的プロスペクト理論を仮定した Dynamic prospect model (DPM) を比較した. こうすることで, モデル間の仮定の違いは修正・追加された 1 つの仮定に限られ, モデルに置いた仮定を予測妥当性の観点で評価することができる.

結果

4.1. 不確実性回避選好の推定

MCMC を用いて (10) 式のパラメータをベイズ推定した. MCMC の設定はチェーンを 4 本とし, 各チェーンで warmup を 1000, 事後分布からのサンプリングを 1000 とした. この設定にて合計 4000 の事後サンプルを得た. すべてのパラメータについて $\hat{r}_{hat}$ が 1.01 を下回ったため推定は収束したと判断した. 推定の結果, 不確実性回避傾向を示すパラメータ ρ の EAP 推定値は 0.26 ([0.24, 0.29]) であった.

4.2. 事前主観確率の設定

主観確率を, 推定した不確実性回避選好に基づいて設定した. 不確実性回避選好測定課題における不確実クジの報酬額は 0 または 500 を取るため, 各報酬額を 500 で割ることで, マキシミン期待効用 $U(x)$ は [0.00, 1.00] を範囲にとるようになる. これを踏まえ, 本研究では,

マキシミン期待効用 $U(x)$ が不確実性回避選好を考慮したときの事前主観確率となるとアドホックに仮定した。

本研究では、主観確率 θ の事前分布であるベータ分布の期待値が、事前主観確率と一致すると仮定して、

$$\frac{a}{a+b} = U(x) \quad (13)$$

とした。また、任意の分散 v を仮定することで、事前分布の分散を表す、

$$\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)} = v \quad (14)$$

が得られる。この2つの式を連立方程式として解くために、 $U(x)$ を算出し、 v の値を定める。

主観確率 $U(x)$ は (10) 式に $x_{min} = 0$, $\bar{x} = 0.5$ と推定したパラメータ $\rho = 0.26$ を代入して、 $U(x) = 0.37$ と計算することができる。また、 v については、Beta(0.5, 0.5)と同じ分散を持つとアドホックに仮定したうえで、式 (13) と式 (14) の連立方程式を解き、主観確率 θ の事前分布を、

$$q(\theta) \sim \text{Beta}(0.32, 0.54)$$

と設定した。

4.3. 比較モデルのパラメータ推定

各モデルのパラメータはMCMCを用いてベイズ推定した。MCMCの設定はチェーンを4本とし、各チェーンでwarmupを1000、事後分布からのサンプリングを10000とした。この設定で合計40000の事後サンプルを得た。また、すべてのパラメータについて $\hat{r}$ が1.01を下回ったため収束したと判断した。

4.4. モデル比較

計8つのモデルを比較した結果、最も高い予測力を示したのはDPMであった。またDPMに置いた新たな仮定を評価するため、BUMとFBUM、CPM、DPMを比較し、新たな仮定の妥当性を段階的に検討した。各モデルの負の対数周辺尤度から、モデルの予測力はDPM(3808.67)、CPM(3811.18)、FBUM(3821.68)、BUM(3997.03)の順に高く、段階的な拡張に応じてモデルの予測力が高まっていた。DPMとCPMのモデル比較で、ベイズファクターを算出すると12.35であった。

またベイズモデルの事前分布の設定について、Jeffreys事前分布であるBeta(0.5, 0.5)と同じ分散を持つと仮定したが、モデル比較の結果は事前分布の設定によって異なる場合がある。そこで一様分布であるBeta(1,1)と同じ分散を持つと仮定し、事前分布を設定した場合についても分析を行った。その結果、モデルの予測力の順位はBeta(0.5, 0.5)の場合と同じであった。

5. 考察

本研究では、非定常環境下の経験的意思決定を忘却ベイズ推論モデルと動的プロスペクト理論に基づいて説明するモデルが採択された。忘却ベイズ推論モデルによれば、人が直近の経験を重みづけるような学習プロセスがあることが示唆される。また、本研究の主たる目的であった動的プロスペクト理論の検証において、人が経験によってリスク回避的なバイアスを低減させ、ベイズ合理的な選択傾向を持つようになることが示唆された。

これまでのDfE研究では、CPTからの逸脱としてリスク回避パラメータ γ について多く議論されてきた。しかし本研究の結果は、そうした逸脱が、実際には試行全体を通じて平均化されたパラメータの観測に起因する可能性を示唆する。本研究で採択されたDPMにおいて、ベイズ合理性からのバイアスであるリスク回避パラメータ γ_t は、 $\gamma_1 = 0.67$ から $\gamma_{100} = 0.92$ に更新されていた。この動的な更新過程を考慮すれば、DfEにおける意思決定傾向はCPTと矛盾するものではなく、むしろDfEに内包される学習メカニズムによってCPTを拡張し、DfDとの整合的理解が可能となったと考えられる。

文献

- [1] Charness, G. & Rabin, M. (2002). Understanding Social Preferences with Simple Tests. *The Quarterly Journal of Economics*, 117, 817-869.
- [2] Ellsberg, D. (1961). Risk, ambiguity, and the savage axioms. *Quarterly Journal of Economics*, 75, 643-669.
- [3] Gilboa, I. & Schmeidler, D. (1989). Maxmin expected utility with non-unique prior. *Journal of Mathematical Economics*, 18, 141-153.
- [4] Kahneman, D. & Tversky, A. (1979). Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk. *Econometrica*, 47, 263-291.
- [5] Kilka, M. & Weber, M. (2001). What Determines the Shape of the Probability Weighting Function under Uncertainty? *Management Science*, 47, 1712-1726.
- [6] Konstantinidis, E., Harman, J.L., & Gonzalez, C. (2022). Patterns of choice adaptation in dynamic risky environments. *Memory & Cognition*, 50, 864-881.
- [7] Luce, R.D. (1959). *Individual Choice Behavior: A Theoretical Analysis*. New York: Wiley.
- [8] Rakow, T. & Miler, K. (2009). Doomed to repeat the successes of the past: History is best forgotten for repeated choices with nonstationary payoffs. *Memory & Cognition*, 37, 985-1000.
- [9] Tversky, A. & Kahneman, D. (1992). Advance in prospect theory: Cumulative representation of uncertainty. *Journal of Risk and Uncertainty*, 5, 297-323.
- [10] Tymula, A., Wang, X., Imaizumi, Y., Kawai, T., Kunitatsu, J., Matsumoto, M., & Yamada, H. (2023). Dynamic prospect theory: Two core decision theories coexist in the gambling behavior of monkeys and humans. *SCIENCE ADVANCES*, 9, eade7972.