

# 可換図式で解釈する概念理解 Understanding Concept Building with Commutative Diagram

美馬 義亮

Yoshiaki Mima

公立はこだて未来大学

Future University Hakodate

mima@fun.ac.jp

## 概要

数学学習のような抽象的な概念を学ぶとき、学習者は、教科書の記述を追い、演繹的な思考を繰り返して、思考モデルの運用能力を獲得することができる。このような方法で、学習者は個人の努力では難しい抽象的な思考様式を身につけることができる反面、概念獲得が不成功に終わる事例も多い。抽象的な概念の獲得を確実に行うことは、学習意欲にもかかわる。本報告では、抽象的な概念の学習で何が起こるのかについて、圏論で用いられる可換図式を用いながら考察をおこなう。

キーワード：概念、学習、抽象、可換図式、ラディカル構成主義

## 1. はじめに

ヒトは生まれてからのち、自己の環境の中にある対象を認識し、言葉の運用の応力を獲得し、思考し、体験を言葉で表現できるようになるという認知的発達過程を辿る。加えて、ヒトは自らの経験に基づく概念を獲得のみならず、(図式を含む)言語による記述を読み解き、文化の中に蓄積された抽象的な概念を学びとることが可能となる。

たとえば、学校教育のなかでは、殆どの学習者が自然数の概念や自然数に関する基本的な演算を身につけている。反面、簡単に学び取ることが難しい抽象的な概念も少なくはない。

### 1.1 抽象的な概念の学習は難しい？

初歩的なプログラミング言語の学習の教育を行うとき、変数への代入や四則演算、条件式の記述は比較的短時間で扱えるようになるが、変数による制御を行う「for文を使った繰り返し」を理解できる人たちの割合は低い[1],[2]、また抽象度が高い「関数定義」を利用できるようになるためにも一定の時間が必要である。

理工工学系の学生が、大学初年時に標準的に履修すると考えられる解析学や線形代数でも、「つまずき方」への指摘がなされている[3]など、教育の現場として、ほぼ同様なことが起こっているという印象を持つ。抽象的な概念の複雑さが増すほど、その概念を理解し、運用するのが難しいことは当然のことだが、現実には、理解の困難さが上昇する複雑さに対する閾値が想像以上に低いという印象がある。

このような問題が発生する原因の一つは、教示側の教育技術が低いことや教育リソースが十分に割り当てられていないことによるものとも考えられる。たしかに、力量のある指導者が、時間をかければ、理解に導くことは可能であろう。

同時に、これまでも議論されている[4],[5]のように、このような問題は、算数の文章題におけるの題意の理解不足ということと共通した課題をもち、教科書や問題の読解力を含めた、学習者の言語の運用能力に問題があるということに関わる問題でもありうる。

### 1.2 抽象的な概念学習の困難さと価値

本報告で扱う抽象的な概念は、これまで述べてきたような、学校の教科書で紹介されるような概念のことを指すものとする。学校の教科書の多くは、単元に分かれていて、その単元のなかで新しいことばが紹介され、その新しい言葉を用いて、新概念の説明がなされる。

抽象的な概念の獲得の難しさは、「知らないことを知る」ことにある。「わかれば納得」なのだが、「わかるまでは五里霧中」といった感覚である。おまけに、わかったとしても、何故わからなかったかを説明することは案外難しい。

しかしながら、その抽象的な概念について納得できたとするならば、学習者は、新しい知識として、その抽象的な概念を運用してことになる。このとき、今まで見て、扱っていた対象が、新たな概念の枠組みで、

整理，再解釈すると，その対象の振る舞いがより明確に見えるということが起こる．抽象的概念の学習にはこのような，対象を見通す視点を変えるメリットがある．

### 1.3 文化の中の抽象概念

学習対象とする概念は，思考のための道具として，一定の割合を占める人が学び，実際の問題解決の道具として役立てられる．また，他者にその概念が伝達することにより，文化の中で伝承されているものである．このような概念を「抽象概念」と呼ぶものとする．あわせて，上記のような前提を満たす抽象概念は，文化に属する言語によって記述され，学習者は教科書のような書籍などに記されたその言語記述の内容を理解することにより，再構築可能な性質をもっているものとする．

学習者はその構造を「理解し，運用能力を獲得する」ことが求められている．ここで獲得すべき知識は，原則として教科書や参考書の中で言語によって説明がなされている．学習者は，対象概念に関連した用語を知り，それらの用語の意味に関する説明を読み，聞き，解釈をおこなうことによって徐々にその概念を獲得していくように思われる．

本報告では，このように，人間がもつ文化のなかに確立された概念を，主として言語を通して個人が獲得する過程について考察し，抽象的な効率的な学習方法について考える．

### 1.4 研究の目標

ここでは，「まったく新しいタイプの概念モデルを，いかにすれば正しく構築し利用できるようになるか」ということが問われている．最終的には，抽象的概念の獲得のための，明確な学習方略を示せるようになることが研究の目標となる．

## 2. 学習対象である「抽象概念」について

高校数学の単元のように一定の複雑さをもつ，抽象的な概念的構造を理解しようとするときのことを考えてみよう．例をあげるとすれば，ベクトルや三角法のような概念は，現実世界の記述や解釈のためのモデルとして広く利用されている．

### 2.1 「抽象概念」の一例としての平面ベクトル

高校数学で平面ベクトルの概念を学ぶ場合を例にあげよう．平面ベクトルを学ぶことになった学習者は，まず，この「平面ベクトル」という言葉にであらう．このとき，「平面ベクトル」は，これから学ぶ概念に付けられたラベル（名称）ではあるが，このラベルは，学習者に対して，その概念がどのように利用できるかを教えてくれるものではない．

### 2.2 学習者と平面ベクトルとの出会い

本報告が議論する学びの対象は，学校における学びの対象となっている体系化されたひとまとまりの概念とする．ここでは，教科書の「平面ベクトル」の単元が，平面ベクトルの概念を具体的に伝達するためのメディアとなる．

学習者の目標は，見当もつかないその概念を理解し，その概念を用いてこれから出会う問題を解けるようになることである．

学習者はまず，数学の教科書や参考書の平面ベクトルに関連した章を開く．概念は，学習者にとっては，新たな思考のためのモデルを提供するわけだが，そのモデルの意味は未知のものである．

平面ベクトルの概念は，平面ベクトルという言葉だけで説明できるわけではない．平面ベクトルに関連したいくつかの言葉から構成されている．ある参考書 [6] では，平面上のベクトルの紹介における記述を列挙してみると，「ベクトルの向き」，「ベクトルの大きさ」，「単位ベクトル」，「ベクトルの和」，「ベクトルの差」，「逆ベクトル」，「ベクトルの実数倍」，などの記述が見つかる．

これらの言葉は，平面ベクトルの属性や平面ベクトルの振る舞いを表現するものとして用意されているが，その振る舞いを詳しく説明する文章が用意されているわけではない．平面ベクトルの説明は，ここではいくつかの例によって行われている．学習者は，個々の概念を言葉で読み取るのではなく，いくつかの抽象的な平面ベクトルの例をたどりながら，平面ベクトルの振る舞いを理解せざるを得ない．

### 2.3 「抽象概念」の構成と説明

抽象概念は，一般には複数の，その抽象概念に固有の言葉（以後，テクニカルタームとよぶ）によって記

述される。概念は、教科書においては、その概念を構成するより小さな概念を表すテクニカルタームとそれらの関係として言語をもちいて表現される。しかし、あるテクニカルタームの意味が、学習者にとって理解可能になったものでないと、学習者は「抽象概念」を説明できるようにならない。

学習者は、まったく新しい、いままでに経験していない概念を、どのようにして学ぶのかというと、例示による体験を通して学んでいるのだろうと推測できる。数学の本では、ほぼ必ず関連の例題が提供される、その例題を具体的な対象操作を伴う形で、いくつも操作を体験することによりあらたな概念を会得するのが数学における一般的な学習方法だと考えられる。

概念学習については、テクニカルタームを意識し、テクニカルターム同士の関係を、自分の理解に基づき言語化して整理するとともに、抽象的な概念と関連した現象を関係付ける手法 [7] も有効であるとされている。学習者にテクニカルタームを列挙し、それらの関係を、概念マップという構造に纏めさせる方法である。

## 2.4 数学の記述における簡潔性

数学概念の説明においては、簡潔性を重視するのがその特徴の一つである。これらは、おそらく、冗長性を持たせないことにより、曖昧さを排除し、不正確な記述を避けようとするものだと考えられる。言語の運用においては、一つの言葉ができるだけ一つの意味をもつことを保証しようと言うことなのだろうが、そのことが学習者にとっては取り憑きにくさの原因の一つになっている。

## 3. 思考と可換図式

以上の考察は、2.1 節以下において、高校数学の「ベクトル」によって抽象的な概念を例示し、その抽象概念の理解が、どのような過程を経て行われているかに関する考察をおこなった。本節では、言葉を利用することは、概念の抽象化と関わり、その結果思考に関する負荷を軽減している可能性があることを指摘する。

### 3.1 思考を支える抽象化

日常生活の中で使う言葉の多くは、具体物を指すものではない。日常生活のなかで思考を行うとき、多くは抽象化を利用したプロセスをおこなっている可能性がある。たとえば、冷蔵庫から卵を取り出して目玉焼きを作ろうとするときは、特定の卵を取り出すが、そ

の卵に名前がついているわけではない。取り出した卵に対する知識は、一般の卵に対する知識である。熱したフライパンの上で卵を割れば、フライパンの熱で固まるという現象が起こるのは、どの卵に対しても同じだからである。

卵という概念があるとすれば、それにはいろいろな事実や関係が含まれている。その卵の概念の中には、「熱したフライパンの上におとせば、固まる」という記述が埋め込まれているとすれば、どんな卵に対しても、作業者は、熱したフライパンの上で卵が固まると予想するのである。

われわれが、生活の中で扱うのは、個別のモノではあるのだが、それを取り扱うときに、なにが起こるかということは、日常生活で扱われるものを抽象化した概念 (図 2) をもちいて、その振る舞いを予想していると考えられる。

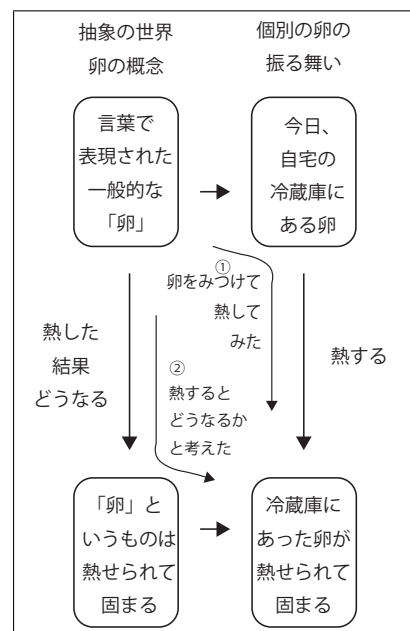


図 1 抽象と具象の関係

### 3.2 抽象化による思考

図 2 は、可換図式として考えると、「① 一般の卵の一例体例である、自宅の冷蔵庫にあった卵を、実際にフライパンで熱してみると固まった」ということと「② 一般の卵を熱すると固まるというから、フライパンで加熱熱した卵は固まる」ということは同じ「卵が固まる」という結論を導く。

この可換図式を解釈すると、一般化された抽象的な議論は、それらに対応する具体物の振る舞いを実際に

行わずに、その結果を予測することができるということを意味する。

### 3.3 抽象理論のもたらすメリット

このような、可換図式による「予測」が成立するとき、抽象化された世界での議論は、具象の世界に反映されるため、抽象の世界でのショートカットが具象の世界でもショートカットとなる。

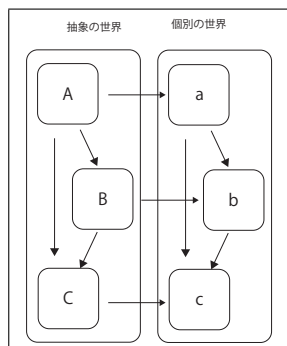


図2 ショートカットの反映

この考え方を敷衍した場合の例を示すと、平面幾何学を学んだ人は、二次元平面上に描かれた三角形は、個別の形状にかかわることなく、いつでも瞬時にその内角の和が180度になることが主張できる。それは、我々が三角形の概念に関して一定の理論的な深さまで、知識として持っているからなのである。このとき、三角形という概念は、抽象的な存在であるが故にその本質てきな議論を可能にしているとも言える。目の前の対象に対して、概念の具体例であることがわかれば、その概念がもつ抽象的に表現された記述を、その具体的対象にあてはめて、具体的対象がもつ性質を（場合によっては非常に簡単に）知る事ができるというメリットをもたらすのである。

### 3.4 言葉と思考とコミュニケーション

戸惑いながらベクトルを学び始める学習者の思考の中ではなにが起こるのだろうか？現在、仮説として有望視しているのが、Novakら [7] による、概念マップの構築である。教科書や参考書の中に出現するテクニカルタームに対しては、最初は完璧な理解を持たないが、それらのテクニカルターム間の関係を、テキストの記述から、徐々に意味付けしていくと同時に、各自が問題演習を通して感じた具体的な実例の世界と関連づける作業を行なっていることになる。

言語であるテクニカルタームは、学習者にとって2通りの働きをする。一つは、記憶の固定化のためのツールとしての働きである。言葉に触れると、概念を思い出すことのできるラベル付けは重要な機能となる。もう一つの役割は、このラベル（言葉）が指導者や同僚とのコミュニケーションの媒介のためのツールとなることである。ここでは、学習者と他者とのコミュニケーションをとるために、その学習対象にかかわるテクニカルタームの一式が、学習者の概念マップと他者が保持している概念マップを結びつける（圏論の言葉で言えば、関手のような）役割を行なっている。

### 4. 考察と展望

思考や学びにおいて、抽象的な概念が個別の振る舞いを予測することに役立ったり個別の振る舞いの集まりが抽象化された概念や理論を生み出すということを考え始めた [8]。

個々の対象に関して、概念マップを作成し、マップに登場するテクニカルタームに意味付けをするという作業を通じて、対象の認識が、具体的な記述として意識化されるとすれば、概念にかんする概念マップも作成可能であろう。

「概念」という概念を考えるにあたって、抽象化について考えることは重要なことであろう。さらに、抽象化を考えることは同時に、同一性の問題にも関わってくるようにも思われる。さらには、これは、対象の認識にかかわる事柄でもありと考える。対象の識別の抽象度の調節や認識は以下にしてなされるのだろうか？

ラディカル構成主義 [9], [10] では、対象を認識する際には、感覚器でとらえられたものは represent（再現前化）されてたうえて認識されると主張する。このような考え方に基けば、同じ対象に対しても異なる抽象度をもつもの（例えば、生物→動物→犬→ハチ公）として認識を保つことが可能になると解釈可能である。このような考え方をもとに「概念の概念マップ」を構築することは可能であろうと考える。ウィトゲンシュタインが指摘したように [11] 言葉の意味を捉えることは難しく、それを明確にするためには場合によっては言語化し得ない、すなわち共有し得ない個人的体験まで遡って探求する必要があるのかもしれない。しかし、「概念の概念マップ」にかかわらず、すべての概念マップは、意味の精緻化を進めれば、概念マップの作成者ごとに個別化が進むであろう。そして、それらの多様な概念は、言語を媒体にした対話により、他者と共有する過程において矛盾を取り除き、文化の中で

の貴重な共通資産になるのではないかと考える。

最後に、数学の圏論と認識論の関係について私的な所見を述べる。前提となる、筆者の（数学としての）圏論の理解は、十分とは言えないため、本報告の議論の対象になっているとはできない。しかしながら、圏論の考え方自体は、数学の中で扱われる数学的対象の認識に深く関わるのであろうという認識をもっている。さらなる議論を深めることを目指したい。

## 5. 謝辞

この研究の一部は JSPS 課題番号 JP18K11576 の助成を受けて実施しているものです、研究支援に感謝します。

## 文献

- [1] 保福やよい, (2013) “なぜプログラミングは難しいのか? 繰り返しの理解構造と C の教科書分析からのアプローチ”, 情報処理, Vol. 54, No.3
- [2] 美馬 義亮, “公立はこだて未来大学における初年度プログラミング教育”, 情報処理, Vol. 57, No. 4
- [3] 千葉 逸人, 河添 健, 嶺 幸太郎, 山田 裕史, 佐々木 東容, 落合卓四郎 (2020) “数学のつまずき方” 数学セミナー, Vol. 59, No. 4, pp. 7-33.
- [4] 新井 紀子, (2018) AI vs. 教科書が読めない子どもたち, 東洋経済新報社
- [5] 今井むつみ他, (2022) 算数文章題が解けない子供たち, 岩波書店
- [6] チャート研究所, (1999) チャート式 基礎からの数学 II+B, 数研出版株式会社
- [7] Joseph D. Novak, D. Bob Gowin, (1984) Learning How to Learn, Cambridge University Press.
- [8] 美馬 義亮, (2021) “概念形成に関する「圏論的」解釈について”, 日本認知科学会第 38 回大会 p- 51
- [9] エルンスト・フォン・グレイザーズフェルト, (2010), ラディカル構成主義, NTT 出版
- [10] 山下和也 (2019) カントとオートポイエーシス, 晃洋書房
- [11] ルートウィッヒ・ワイトゲンシュタイン, (2022) 哲学探究, 講談社