# 知覚的な構造補完による不可能立体の不可能性の説明
# An Account for Impossibility in Perception of Impossible Figure by Structural Completion

日髙　昇平†
Shohei Hidaka

† 北陸先端科学技術大学院大学
Japan Advanced Institute of Science and Technology

**概要**
不可能立体とは、立体的な構成が不可能と判断される平面図形である。しかし、実際には立体として構成可能な不可能立体が存在する。こうした知見は、平面図が持つ制約条件より、強い条件下で立体知覚が成立することを示唆する。本研究は、その条件の一つとして知覚的な構造補完があり得ることを示す。具体的に、ある平面上の線画を射影として持つ任意の立体像を構成する方法を用い、ある種の知覚的補完にあたる制約を加えることで、立体的構造が構成不可能になる例を示す。

キーワード：不可能立体 (impossible figure), 知覚的補完 (perceptual completion), 立体知覚 (stereo perception)

## 1. 不可能立体とその作図法

ある 2 次元上の線画に対し、人はそれを立体的な図形としては実現できないと判断することがある。こうした立体様の平面図形は不可能立体と呼ばれる[1]。不可能立体は、立体としての作図が構成不可能であると知覚されるが、実際には作図可能である場合も存在する。具体的に、杉原[2]は不可能性知覚を誘導する立体図形の作図法を提案している。

杉原[2]は点と線分で構成される平面図形を対象として、その平面図形を２次元射影として持つ３次元構造が存在するか否かを判定する計算方法を提案している。この方法では、３次元構造の持つべき制約を線形方程式・不等式として表現し、ある目的関数の下でのそれらの方程式・不等式を満たす解が存在するかを線形計画法に帰着させて、数値的に求める解の存在を判定する方法である。

杉原の方法[2]は一般には無限に存在する方程式の解のうち恣意的に一つのみを与える計算法であるために、方程式が表現する図形の数理的な特徴の見通しを立てにくいなどの技術的な問題があった。これらの技術的な問題点を解消すべく、Kanayama & Hidaka [3]は、杉原の方法[2]に着想を受け、より数理的に洗練された不可能立体の作図方法(以下この作図法を KH 法と呼ぶ)を提案した。

本研究は、KH 法を用いて、どのような場合に立体的な構造の解が存在・不在になるか具体的な事例を示し、人の立体知覚における不可能性判断の手がかりに関する仮説を提示する。KH 法では、立体的な作図が不可能であるとは、平面的な解しか存在しない場合として得られる。もし、この計算機序が立体知覚のある過程を捉えるとすれば、立体構造の不可能性の知覚とは、局所的には立体であり得る図形が、図形全体としての制約を考慮した場合には、平面解のみしか持たない場合に生じると予想される。

このような場合に当たる場合の一つとして、立体的に知覚される平面図形において、その遮蔽された観察不可能な部分に、構造的な補完がされた場合がある。したがって、本研究は、知覚的な立体構造補完が起きるときに、それがない時に比べてより立体像が制約され、その結果として、図形全体としての立体的な構造が不可能であると判断される、という仮説を立てた。

本稿では、そうした仮説に相当する具体的な図形を例示し、構造補完による説明が可能であることを示す。

以下、KH 法を具体的に示し、それを応用した具体的な図形についての考察を述べる。

## 2. ある平面図を射影にもつ立体の作図

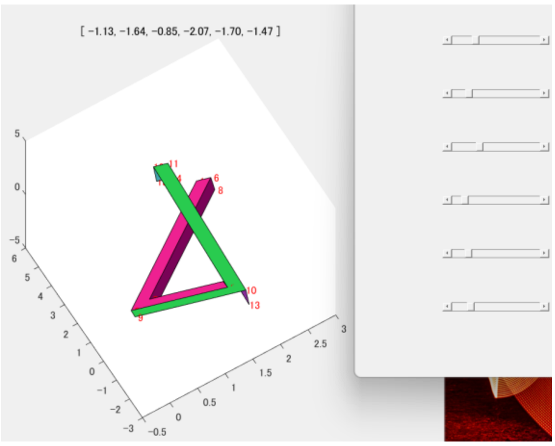


図１：不可能立体の自由度調整の例

杉原[2]の提案手法（以下、「杉原の作図法」と呼ぶ）では、ある平面上への射影での見えを特定の線画として与え、その線画を射影として持つ、図形の各頂点の３次元座標を、いくつかの制約条件を満たすように計算する。この方法では、主に(1)同一平面上にある頂点の集合が満たす方程式制約、(2) 特定の視点からの重ね順を反映する、複数の平面の間の不等式制約、(3)不等式制約が等式を満たさないように制限するための変数を導入する。そのうえで、(1)-(3)の制約条件を満たす各頂点の３次元座標を計算する問題を、制約を満たすときにのみ０となる目的関数を導入した線形計画法を数値的に解き、付与の２次元線画の見えを持つ立体構造の実現例の一つを求める。

## 3. 平面制約を満たす立体線画の構成法

杉原の作図法は、必要以上に多数の未知変数を要求し数理的な構造が捉えにくいなど問題があった[2]。これを解消すべく提案された KH 法では、同一平面上の頂点の存在に由来する方程式を陰に行列式で表現することで、３次元図形のもつ頂点の数 N の自由度を、($N$-$K$)次元制約部分空間と自由に設計可能な $K$ 次元部分空間に分ける。N-K は一般に面の数 P と頂点間の共線性によって決まり、同一面上の制約を除いた K 次元が、特定の２次元線画を射影として持つ３次元図形の自由度となる。この自由度を手動で任意に調整することで、付与の制約条件とは独立に、設計者の意匠的な選好を反映した図形を作図することができる。

具体的には、同一平面の制約は、ある行列式の余

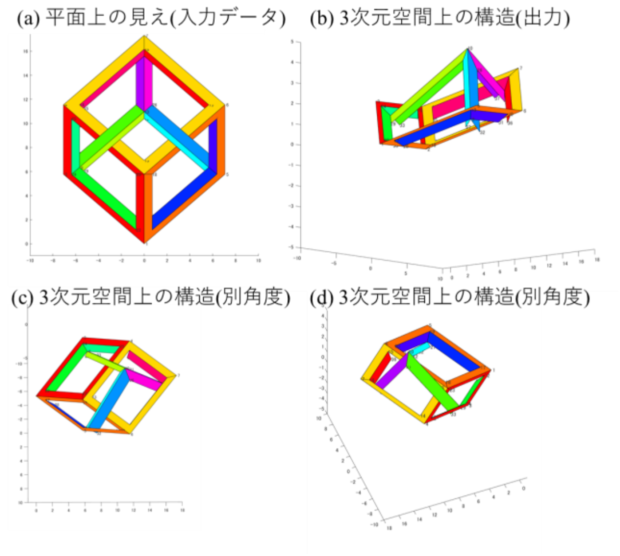


図 2：不可能立体を(a)平面図として射影にもつ立体像の複数の視点からの見え(b), (c), (d)。

因子展開で得られ、その余因子係数行列を特異値分解することで制約されない部分空間(自由パラメタ)を得る。この得られた自由パラメタを手動で設定することで、付与の平面制約を満たす任意の不可能立体を作成することができる。図１はある平面図を射影にもつ条件下で、６ 自由度を持つ立体像の配置を調整する例を示している。

## 4. 構造補完による不可能性知覚の説明

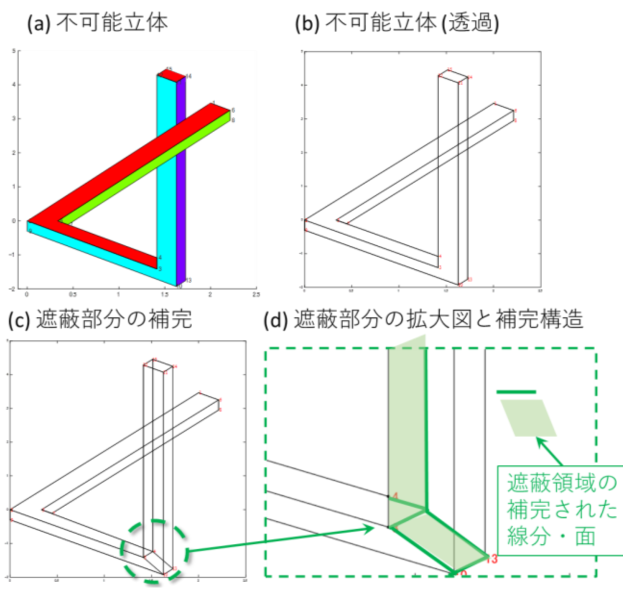


図 2：不可能立体を(a)平面図として射影にもつ立体像の複数の視点からの見え(b), (c), (d)。

前節で提案した作図法を用いれば、いわゆる不可能立体を作図可能であるだけではなく、入力データとしての制約条件を変えることで、その制約下で立体的な構造が可能かを調べることができる。

本研究では、不可能立体における不可能性の知覚は表面には見えない遮蔽部分において、知覚的に構造が補完されていることで説明できるのではないかと仮説を立てた。具体的に、図 3 (a)(b)の不可能立体を例に考える。図 3 (c)のように、縦に伸びた柱状の構造の見えない裏側に、筋交いのような結合が補完された場合、表面上は見えない新たな面が生じる(図 3 (d))。仮にこうした構造の補完が行われたとすると、この条件を満たす立体的な構造は存在しないことが、提案システムの計算結果からわかる。つまり、補完された結合と面の構造を持つのは、すべての線分が同一平面上にある場合に限られる。したがって、局所的には立体的に知覚される一部と、しかし全体としては立体的ではありえないという２つの相反する構造の知覚が生じ、それが不可能性の知覚へとつながると考えられる。

## 5. 符号化効率性による知覚像の生起

知覚的な構造補完で不可能性を説明できるとしても、なぜ観測されない遮蔽部分において知覚的な補完をする必要があるのか疑問が生じる。これについては、符号化の効率性を基準とする仮説[4, 5]が説明を与える。この考え方によれば、知覚系は感覚データを効率的に符号化するためのシステムであり、データに潜在する対称性[5]等を最大限利用するために、データには必ずしも明示されない未知なる領域を補完してでも符号を効率化する[6]。具体的に不可能立体の場合でいえば、つまり、データには明示されない領域において知覚的な構造を補うことで、図形の対称性が高まり、効率的に符号化できるために、知覚的な補完が生じるのだと考えられる。

データには表れない知覚的な補完が生じること自体を直接的に実証することは困難であるが、それを想定することで説明がつく現象はいくつも存在する。今後は、そうした知見を積み重ねることで、効率的な符号化としての知覚の理論の実証に向けて研究を展開する。

## 謝辞

本研究は JST さきがけ JPMJPR20C9 の補助を受けて行われた。

## 文献

[1] L. S. Penrose and R. Penrose, Impossible objects—A special type of visual illusion, British Journal of Psychology, 49 , 31–33, 1958.
[2] 杉原厚吉, だまし絵と線形代数, 共立出版, 2012.
[3] Kanayama, H. & Hidaka, S. (2022). Impossible Solids of Your Choice: Designing any 3D Figure from a Given 2D Line Drawing, NICOGRAPH International 2022.
[4] 日髙昇平 & 高橋康介. (2021). 符号化効率性によるネッカーキューブの立体知覚の計算論的説明. 日本認知科学会第 38 回大会論文集. P1-54.
[5] 日髙昇平 & 高橋康介 (2021). “なぜネッカーキューブはあの立体にみえるのか”. 認知科学, 28(1), 25-38.
[6] 日髙昇平 & 高橋康介 (2019). 未知領域を含むオブジェクト同定による窓問題知覚の説明. 日本認知科学会第 36 回大会論文集. (O2-1) p16-18.