

パターン認知と変換群構造の関係の分析

Analysis of the relationship between pattern recognition and transformation group structure

亀井 暁孝[†], 日高 昇平[†]
Akimichi Kamei, Shohei Hidaka

[†] 北陸先端科学技術大学院大学
Japan Advanced Institute of Science and Technology
kamei@jaist.ac.jp

Abstract

人は様々なパターンから規則性を見出す傾向がある。今井ら [4, 5, 6] は、パターンの良さやパターン対の類似度に対する人の判断を説明する変換群構造説を提唱した。彼らの理論は、パターンが持つ変換群構造によってパターンの良さや類似度を予測することができるとする仮説である。本研究では、先行研究で報告されていないパターンに対しても仮説が成立するか追試実験により検証を行った。実験の結果、仮説を否定しないが強く支持する結果は得られなかった。加えて、元の仮説を修正した新たな二つの仮説を検証し、より好意的な結果が得られた。

キーワード：パターン認知 (pattern cognition), 変換群 (transformation group), 類似性 (similarity)

1. はじめに

人は、潜在的に複数の解釈が存在する現象から、特定の解を推定する傾向がある。例えば、オノマトペや錯視画像、比喻文の解釈などがある。こうした、人の認知的推論方法は、単に帰納推論では説明付けられないことが哲学的思考実験のクワス算 [1] で言及されている。つまり、帰納推論とは別に、曖昧さを孕む現象から解釈を特定する推論方法が人の認知処理に存在する可能性が考えられる。この推論方法を我々は「思い込み」と呼び、その定式化を目的に研究を進めてきた [2]。具体的には、画像課題を題材にしたモデルと事前制約の関係の分析である。モデルに事前制約を与える、つまり、どのような解を求めるべきか事前知識を与えた場合、モデルは人と同様に少数の観測によって解を特定できるか数値実験を行い検証した。結果として、人の認識に一致する解に関して情報を持った制約を与えると少数事例の学習によって解を同定することが可能であることが確認された。さらに、与える制約の特徴として、群構造（巡回群）を課した場合に有効であることが確認された。

その他の関連研究に、曖昧図形的一种であるネッカーキューブを題材に、その知覚像を予測するモデルの研究 [3] が進められている。この研究では、幾何学図形を不変にする変換に着目し、それらの不変変換の群構造が図形の知覚像を予測するのに本質的であるとする理論を提示している。さらに、人のパターン認知を変換群の性質によって説明付けようとする学説に今井らの変換群構造説 [4, 5, 6] が存在する。これは、人がパターンを認知し、パターンそのものの良さやパターン対の類似性を判断する際に、パターンと変換群の関係によって、評価値の順序が予測できるとする仮説である。

以上で紹介した先行研究を総合すれば、人が現象から規則性やパターンを見出す認知過程には、変換とその群構造が関わる可能性が考えられる。従って、本論文で我々は、先行研究の変換群構造説を対象に、その追試を行い、さらにパターン認知と変換群の関係について新たな仮説を生成することを目的に研究を進めた。

2. 変換群構造説

今井らの先行研究 [4, 5, 6] では、パターン認知における類似性判断と良さ判断に、パターンの持つ変換群の構造が関わるとする変換群構造説が提案されている。その概要は以下の通りである。まず、認知系と世界の単純化として、 n 次元の二値パターン $\{0, 1\}$ を対象に、人は以下の認知的変換群を基本単位として変換を施すと考える。

恒等変換群 $I = \{e\}$: e は恒等変換である。

鏡映変換群 $M = \{e, m\}$: m は鏡映変換である。

位相変換群 $P = \{e, p_1, p_2, \dots, p_{n-1}\}$: p_i は位相変換である。

反転変換群 $R = \{e, r\}$: r は反転変換である。

こうした認知的変換をパターンに施すことで、認知系はパターンの性質を判定する。具体的に、パターンが

変換に対して不変性，もしくは変換可能性を示すか否かを判定することで，パターンが変換に対して持つ構造，つまり変換構造を認知するとしている．また，変換構造は単一パターンが持つパターン内変換構造と，パターン対が持つパターン間変換構造の二種類が存在するが，本研究では，パターン対の類似性に対して追試を行うため，以下では，パターン間変換構造のことを単に変換構造と呼ぶこととする．一般に，2つの認知的変換 T_i, T_j に対して，変換構造のタイプは以下の5タイプに類別され，3つ以上の変換に対して同様に類別される．

$T_i \vee T_j$: T_i, T_j のいずれに対しても変換可能性を示すパターン対の構造で，(OR-結合) 変換構造 $T_i \vee T_j$ と呼ぶ．

T_i : T_i のみに対して変換可能性を示すパターン対の構造で，変換構造 T_i と呼ぶ．

T_j : T_j のみに対して変換可能性を示すパターン対の構造で，変換構造 T_j と呼ぶ．

$T_i \wedge T_j$: T_i, T_j のいずれに対しても変換可能性を示さないが， T_i と T_j を重ねて加えたとき変換可能性を示すパターン対の構造で，(AND-結合) 変換構造 $T_i \wedge T_j$ と呼ぶ．

E : T_i, T_j のいずれに対しても変換可能性を示さないパターン対の構造で，空変換構造 E と呼ぶ．

変換構造説では，上の変換構造の定義に基づいて，パターン対の類似度の順序関係を順序整合性の仮説 (1),(2) 式，順序保存の仮説 (3) 式によって予測する．ここで， $J(T)$ は変換構造 T を持つパターン対の類似度である．

$$J(T_i), J(T_j) \leq J(T_i \vee T_j) \tag{1}$$

$$J(T_i T_j \vee T_i T_k) \leq J(T_i) \tag{2}$$

順序保存の仮説は，順序関係

$$\begin{matrix} J(T_i) & R_1 & J(T_j) \\ J(T_i \vee T_k) & R_2 & J(T_j \vee T_k) \\ J(T_i T_k) & R_3 & J(T_j T_k) \end{matrix} \tag{3}$$

における不等号 R_1, R_2, R_3 が等しいことである．順序整合性の仮説と順序保存の仮説から，変換構造の間に順序関係が定まり，この順序は半順序となる．従って，階層構造をハッセ図で表現することができる．図3は， $\{T_i, T_j, T_k\} = \{M, P, R\}$ とした場合のパターン対の類似度を予測するハッセ図である．実践で結ばれる変換構造を持つパターン対は，類似度の順序が定まり，上の階層の変換構造を持つパターン対の方が下の

階層の変換構造を持つパターン対よりも高い類似度を有する．また，実践で結ばれない変換構造を持つパターン対の間の類似度は比較できないが，順序保存の仮説は成立している必要がある．本研究では，まず，このハッセ図の階層構造が実際に類似度を予測しているか追試実験を行った．

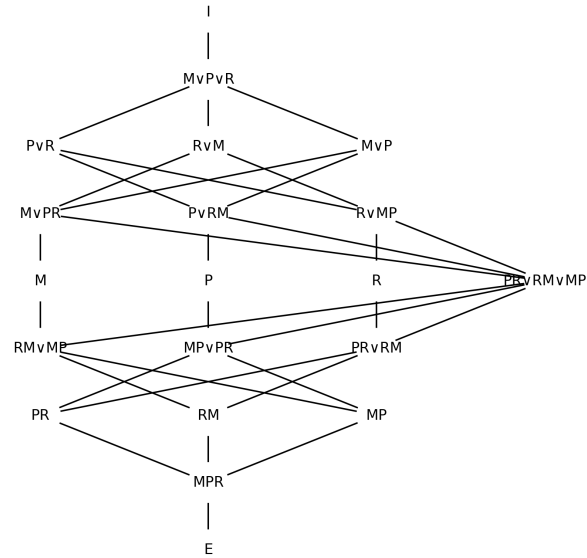


図1 2値パターンの類似度を予測するハッセ図

3. 実験と追試結果

先行研究では，ある変換構造を持つ特定のパターン対を用いて実験を行っていたが，本来は，パターン対の組み合わせは無数に考えることができる．よって，今回は，変換群構造説の追試実験と合わせて仮説生成型の分析を行うため，予備の実験として4ビットのパターン対，計136種類の組み合わせを網羅的に分析することにした．被験者の日本人大学院生10名（男性8

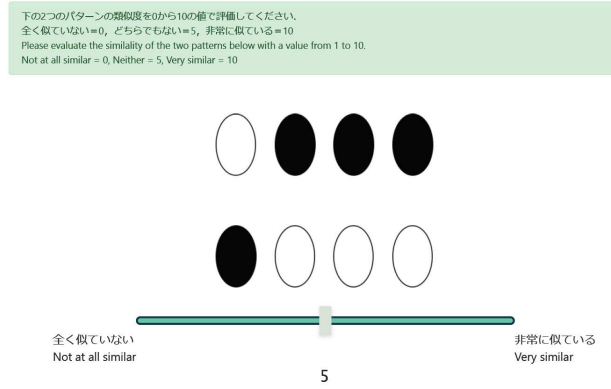


図2 パターン対の類似度を評価する実験環境のイメージ

名，女性 2 名）を対象に実験を行った．刺激としては，136 パターン対を観測させ，類似度を 0 から 10 の段階で評価を行った．図 2 に実験刺激の例とともに実験環境のイメージを示す．WEB ブラウザ上で 2 値パターン対を観測してもらい，その類似度を評価してもらう．ここで，簡単に分析の前提を整理する．4bit のパターン集合を X とする．このとき，置換 $f: X \rightarrow X$ は全てで 24 種類存在する．その中に，恒等変換 $e: X \rightarrow X$ ，鏡映変換 $m: X \rightarrow X$ ，位相変換 $p_i: X \rightarrow X$ ($i = 1, 2, 3$) が存在し，その他の変換に，反転変換 $r: X \rightarrow X$ が存在する．これらの変換を具体的な 2 値パターンに施した際のイメージを図 3 に示す．また，置換と反転変換を重ねた変換の計 48 種類にラベルを付け，行列表現にしたものを図 4 に示している．実際の分析では，先行研究を踏襲し以下の変換群を用いた．

$I = \{e\}$ (4)

$M = \{e, m\}$ (5)

$P = \{e, p_0, p_1, p_2\}$ (6)

$R = \{e, r\}$ (7)

$MP = \{e, m, p_0, p_1, p_2, mp_0, mp_1, mp_2\}$ (8)

$PR = \{e, r, p_0, p_1, p_2, p_0r, p_1r, p_2r\}$ (9)

$RM = \{e, rm\}$ (10)

$MPR = \{e, p_0, p_1, p_2, rm, mp_0r, mp_1r, mp_2r\}$ (11)

変換	A ○●●○ 1234	掲示パターン B ○●●● 1234	C ○○○○ 1234
I	○●●○ 1234	○●●● 1234	○○○○ 1234
M	○●●○ 4321	●●●○ 4321	○○○○ 4321
P	○○●● ●●○○ ●●○○ 4123 3412 2341	●●○○ ○●●● ●●○○ 4123 3412 2341	○○○○ ○○○○ ○○○○ 4123 3412 2341
R	●○○○ 1234	●○○○ 1234	●●●● 1234

図 3 認知的変換による 2 値パターンの変化：数字はインデックス，下線は変換に対する不変性を示す ([4, 5, 6] を参考に作成)

追試として，図 5 のハッセ図で示される順序が実験で得られた平均評定の順序と一致するかを確認した．赤線が仮説の順序関係と実験で得られた評定平均の順序が一致する線である．黒線は，順序関係が一致していない．変換構造の下に数字は，変換構造を持つパターン対の類似度の平均値である．すべてのエッジの

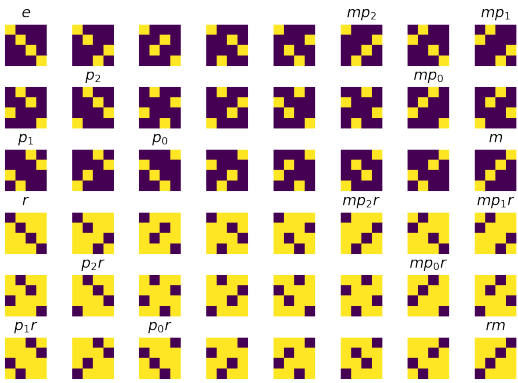


図 4 すべての置換行列（上段 3 行目まで）と反転変換を重ねた変換（下段 4 行目以降）

中で順序関係を満たすエッジの本数の割合を個人の正答率として算出した．さらに，計 10 人の被験者の正答率の平均を最終的な正答率として算出した．その結果として，約 69% の正答率が確認された．均等な確率で一致・不一致が起こる場合をベースラインとし，その正答率が 50% であることを考慮すれば，この結果は，仮説を否定しないが，強く支持するとも言いきれない．その原因として，網羅的にパターン対を分析したため，仮説に対するノイズ的なパターン対が存在する可能性がある．また，先行研究とは違い，4 ビットという小規模のパターンを用いたため，評価に際して優劣がつけづらい状況が生まれた可能性が考えられる．いずれにせよ，パターンの変換群構造と人のパターンの類似性判断に一定の関係性があることが確認された．

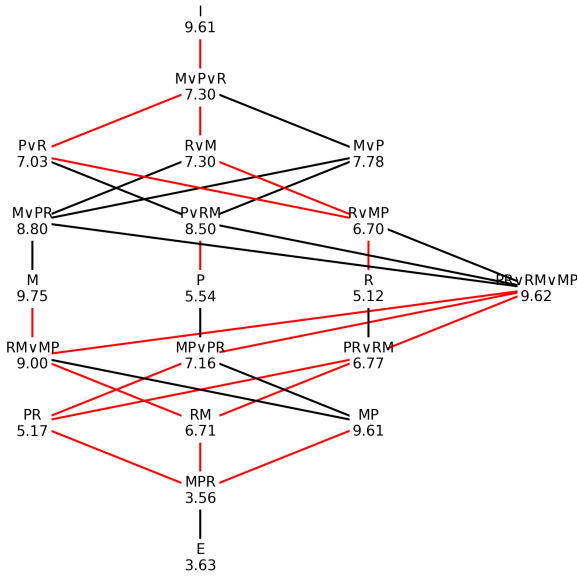


図 5 2 値パターンの類似度を予測するハッセ図（数字は評定値の平均）

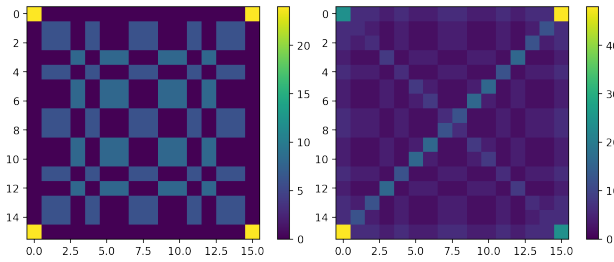


図6 パターン間を変換可能とする変換の位数：縦軸，横軸ともに16のパターンを表す。

図7 パターン対を不変にする変換の位数：縦軸，横軸ともに16のパターンを表す。

4. パターン間の変換集合の位数

先行研究の仮説とは異なる対立仮説の内で，類似性判断をより高い精度で説明する仮説が存在するか調査を進めた．先行研究の変換構造の定義では，通常の論理記号の使用法と若干のずれが存在すると考えられる．例えば，変換構造 MP に対する変換可能性の定義は，積変換群 MP の任意の元に対してではなく， MP に固有な部分集合 $\{mp_0, mp_1, mp_2\}$ に対して定義されていると考えられる．しかし，この定義では変換可能性を定義するために複数の変換群を考慮する必要がある．むしろ変換群の任意の元に対してパターン対の変換可能性を定義した方が直観的にわかりやすく，シンプルに分析を行うことができる，したがって，新たな仮説で分析を進めるに当たり変換構造に加えて，変換群 $\{M, P, R, MP, PR, RM, MPR\}$ の任意の元によって変換可能性を判定する場合を追加した．

パターン対には，その間を変換可能とする変換が複数存在する．このとき，変換可能性を示す変換の数が多ければ多いほど，その変換集合の構造は豊かであり，構造の豊かな変換集合を持つパターン対はより多くの情報を持つと考えられる．従って，パターン間の変換集合の位数と類似性判断が関係することが一つの対立仮説として考えられる．

4.1 パターン間を遷移可能な変換集合

図8は，変換可能性を示す変換集合と類似性の関係を示している．図から変換可能性を示す変換集合の位数が大きいパターン対ほど，その類似度が高く評価されていることが分かる．つまり，遷移可能な変換の種類が多いパターン対ほど似ていると判断されている．図8では，同じ位数を持つパターン対をひとまとめにして，類似度を平均しているが，先行研究同様に変換

構造を単位とした分類の余地が考えられる．従って，相関関係だけでなく，前節のハッセ図のような階層構造にて順序関係の予測ができるか分析を進めた．

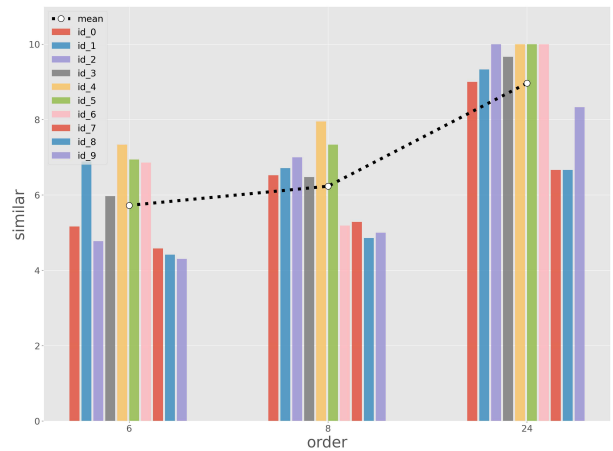


図8 縦軸が類似度，横軸がパターン間の変換可能性を示す変換の数

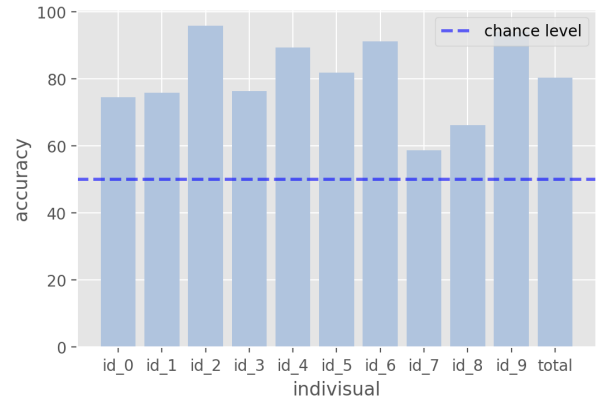


図9 各被験者の評定値に対する類似度予測の正答率：仮説1と変換構造に基づき作成したハッセ図による

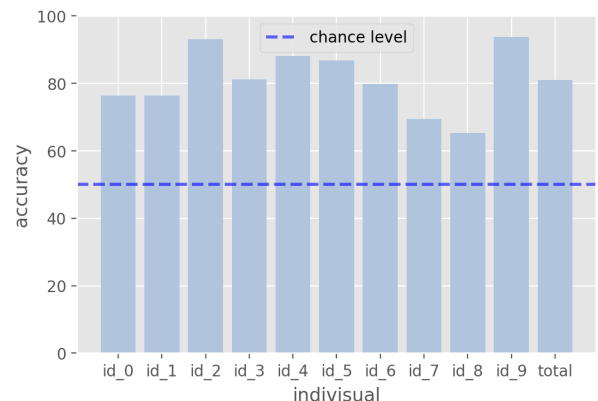


図10 各被験者の評定値に対する類似度予測の正答率：仮説1と変換群に基づき作成したハッセ図による

まず行なった分析は，パターン対に対して変換可能

性を示す変換集合の位数による階層で類似度を予測することである。一つ上位の階層に対して類似度が高くなると予測する。仮説は以下である。

仮説 1: パターン対 (x, y) と遷移可能な任意の変換集合 S_i, S_j に対して, $S_i < S_j$ ならば $J(S_i) < J(S_j)$ を満たす。

仮説 1 に基づく予測モデルにおいて, 変換構造による分類を行うモデルを「遷移変換構造: パターン間を遷移可能な変換集合」, 変換群による分類を行うモデルを「遷移変換群: パターン間を遷移可能な変換集合」と呼ぶ。

図 9 は, 上記の仮説に基づき作成したハッセ図の類似度予測の正答率である。各被験者の平均としては, 約 75% の正答率であった。次に, 同様の仮説で変換群を用いて分析を行なった結果として, 図 10 を見ると, 正答率の平均は約 77% であった。変換構造, 変換群に基づく予測ではともに追試結果よりも高い水準で予測できることが確認された。

4.2 パターン対を不変にする変換集合

次に, パターン対を一つの対象として捉え, パターン対をそのまま不変にするような変換を考える。こうしたパターンを不変にする変換の捉え方は, 今井ら [4, 5, 6] でもパターンの良さ判断において重要な情報とされ, 立体図形の知覚研究 [3] においても重要な情報であること示唆される。従って, パターン対を不変にする変換集合の位数と類似性判断に関係性があると仮説を立て分析を行なった。今回の分析におけるパターン対を不変にする変換 g とは以下の変換を指す。

$$g: X \times X \rightarrow X \times X \quad (12)$$

$$P_2(g) := (x, y) \mapsto (x, y) \quad (\forall x, y \in X) \quad (13)$$

実際に, パターン対を不変にする変換集合と類似度の関係を表したのが図 11 である。常に単調とまではいかなくとも全体的に正の相関関係にあることを確認することができる。ここで, 同じ位数を持つパターン対をさらに変換構造, 変換群によって分類することでハッセ図による類似度予測ができるか分析を行なった。用いた仮説は以下である。

仮説 2: パターン対 (x, y) とそれを不変にする任意の変換集合 S_i, S_j に対して, $|S_i| < |S_j|$ ならば $J(S_i) < J(S_j)$ を満たす。

仮説 2 に基づく予測モデルにおいて, 変換構造による分類を行うモデルを「不変変換構造: パターン対を

不変にする変換集合」, 変換群による分類を行うモデルを「不変変換群: パターン対を不変にする変換集合」と呼ぶ。

図 12 を見ると, 正答率は約 75% 程度であり, 比較的高い値を得た。また, 変換群に基づく予測である図 13 を見ると, 正答率の平均は約 73% でこちらも高い値を確認することができた。パターン対を不変にする変換に着目した分析は新たな着眼点であったが, 結果として比較的高い予測精度を確認できた。このことは, パターン間の関係性そのものではなく, パターン対全体を一つの対象として保存する変換に類似性に関する情報が存在する可能性が示唆されたと言える。また, 遷移可能な変換集合と合わせて, 位数の階層による予測であれば, 確実に集合サイズの異なるパターン対に対して分類を与えることができ, 強い絞り込みができています。パターン対の分類に際して変換の位数に着目することは, 強い制約の観点からも有効であると考えられる。

5. 総合議論

今回, 先行研究を基に, パターン認知と変換群構造の関係性を分析した。先行研究の追試では, 仮説を強く支持する結果とはならなかったが, 少なくとも変換と類似度に有意な関係性があることを確認できた。また, 新たな仮説として, パターン間の変換集合の位数と類似度の順序関係が整合的であるとして分析を進めた。さらに, 変換構造だけでなく, 変換群を用いた予測の分析を行なった。結果として, パターン間の変換集合には明らかな正の相関関係を確認することができた。また, パターン間を遷移可能とする変換とパターン対を不変にする変換という観点の異なる変換集合がともに位数の大きさに依存して類似度を予測できることが確認された。モデルごとに比較すると, 遷移変換構造モデルと不変変換構造モデルでは, ともに 75% 程度の正答率であった。これは, 今井らの提唱する変換群構造が少なくとも 2 種類の変換 (遷移可能性と不変性) に対して, 同等の情報を保持することを示唆していると言える。つまり, 変換構造とはパターン対を取り巻く変換に対してある種の不変量を抽出する関数に近い性質を持つ可能性が考えられる。また, 遷移変換群モデルは不変変換群モデルに比べ高い正答率で予測が行えており, 4 つのモデルの中では最も高い成績が確認された。この結果は, 変換構造のような強い制約を科さずとも変換群のシンプルな構造だけでも十分予測が行えることを示している。さらに言えば, 変換群を用いて類似性判断と関連するさらに本質的な構造を

定義できる可能性があると考えられる。以上から、人はパターンそのものだけでなく、パターンを取り巻く変換に着目して、類似性判断を行っている可能性が示唆されたと考える。今回、変換群間の関係を包含関係や大小関係に絞って分析を行なったが、群準同型写像に基づいて分析を行う方向も考えられる。今後は、さらに bit 数を増やしたパターン対を用いて実験を行い、さらに仮説を精緻化させたうえで研究を進める必要がある。

文献

[1] 黒崎宏. ウィトゲンシュタインのパラドックス：規則・私的言語・他人の心. 産業図書, 1983.

[2] 亀井暁孝 & 日高昇平 (2020). 「思い込み」の認知過程の定式化に向けて：画像回転課題と事前制約の関係の分析 日本認知科学会第 36 回大会論文集, p-101, pp. 638-642.

[3] 日高昇平, and 高橋康介. ”ネッカーキューブはなぜあの立体に見えるのか.” 認知科学 28.1 (2021): 25-38.

[4] 天野要, and 今井四郎. ”パターンの変換構造と類似性認知に関する群論的研究.” 心理学研究 60.5 (1989): 297-303.

[5] 天野要, and 今井四郎. ”パターンの変換構造と良さの認知に関する群論的研究.” 心理学研究 63.3 (1992): 181-187.

[6] 今井四郎, and 天野要. ”変換と写像の概念に基づくパターン認知論.” 応用数理 8.1 (1998): 30-45.

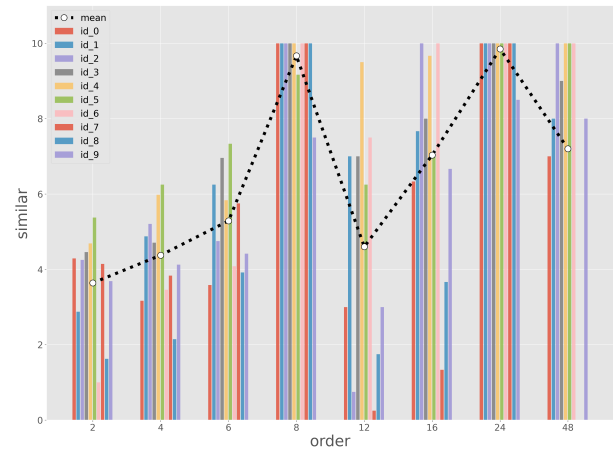


図 11 縦軸が類似度、横軸がパターン対を不変にする変換の数

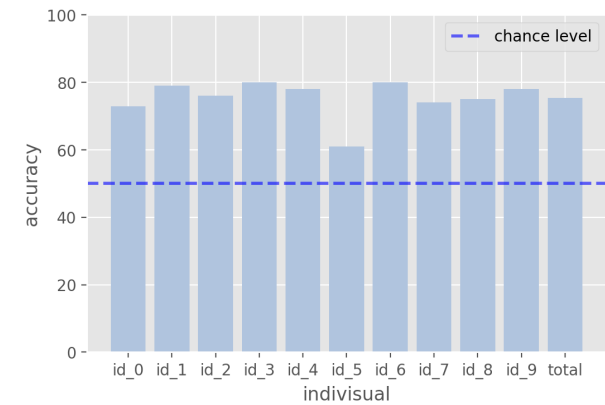


図 12 各被験者の評定値に対する類似度予測の正答率：仮説 2 と変換構造に基づき作成したハッセ図による

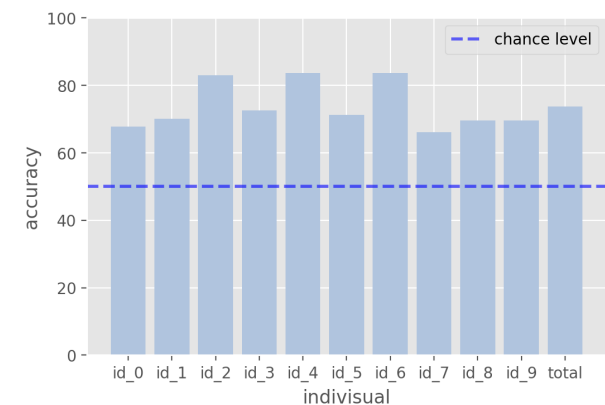


図 13 各被験者の評定値に対する類似度予測の正答率：仮説 2 と変換群に基づき作成したハッセ図による