新しい数学概念の導入時における協調的学習の効果

Effects of Collaborative Learning at Beginning of New Mathematical Content

永井　香
Kaori　Nagai
桜美林中学校・高等学校
J.F.Oberlin Junior and Senior High School
hzr02476@nifty.com

Abstract

When learning new mathematical content and formulas, many students can't solve the different types of problems from the examples given by the teacher. In this study, I carried out a class in which students worked collaboratively and learned by trial and error using the knowledge construction jigsaw method. I found that even if the content was new for the students, this type of collaborative learning allowed them to apply formulas in solving various problems and retain what they learned without a teacher's explanation.

Keywords － Collaborative Learning, Knowledge Construction Jigsaw, New Mathematics Content

１．はじめに

高校数学の教科書において新しい概念や記号が導入されるとき，例を１つ２つ挙げてその概念や記号の定義と，それらに関する性質について述べる形をとることが多い．その後，それらから導かれる公式が提示され，公式を利用して解く例題が示され，教師が例題を説明した後，生徒は類題を解いてみる，ということが繰り返される．多くの生徒は例題とよく似た形式の問題かつ学習した直後であれば公式を適用することができるが，少し問題の形式が変わると途端に適用できなくなる．しかもその知識は試験が終わると忘れる，といった短期記憶であって，なかなか定着しないという状況が日常的に見られる．それは新しい概念や記号について学ぶ際，生徒自身があれこれ考えを巡らせる前に公式がトップダウン的に与えられ，「こうやって解くもの」と教わることが原因の一つと考えた．

知識構成型ジグソー法を用いた授業づくりへのガイド「協調学習授業デザインハンドブック」において，「単元の流れの中でジグソー法をどのように取り入れるか」という問いに対する返答の中に以下のような記述がある．

「…単元の頭に単元全体の内容をつかめるようなジグソーを取り入れることで，以降の学習に子ども達が見通しと興味を持って参加してくれ、結果的に単元全体としてかかる時間が短くなる」

「(高等学校において）単元の頭にジグソーをやるとそのあとの授業の『視聴率が高い』」「授業者からみれば不完全なところはあっても自分なりの理解が形成されていることで続く授業が子どもにとって『分かるチャンス』になる」(p.26)

人が新しいことを目にしたり耳にしたりするとき，そのことについて全く興味がなかったり，予備知識が皆無である場合，一度見たり聞いたりしただけで内容を理解するのは至難の業であろう．

三宅・Norman(1979)の研究に「質問は，既有知識と与えられる情報量がちょうどうまくつりあうときに多く出る」ことを示したものがある．別の言い方をすれば「質問ができるためには，何を質問しなくてはならないか分かる程度には既有知識があった方がよい」ということである．このことを，授業に参加する生徒の状況に当てはめてみれば，「授業を聞いて分かる」あるいは「どこが分かるか分からないかが把握できる」ためには，何らかの既有知識がある方がよい，ということであろう．

そこで本研究では，新しい概念の導入時，教師が説明をする前に生徒自身が説明を読んで考え試行錯誤する，という形式の授業を「知識構成型ジグソー法」を用いて実施し，学習した内容を形式の異なる問題に適用できるかどうか，また一定期間の経過後にも適用できるかどうかを検証することとした．

２．方法

2.1　対象生徒

本校・高校２年生文系コース　１クラス１６名

このクラスは文系の成績上位のクラスで，学習への取り組みは熱心である．半面，数学に苦手意識のある生徒も女子を中心に4割程度いる．数学を受験で必要とする生徒も4割程度である．

2.2　活動と課題内容

「対数関数」単元の導入時，「対数とは？」という説明プリントを配布した．プリントでは指数表示「$a^p = M$」の指数を求める記号として「$p = \log_a M$」をグラフや具体例を用いて説明した．それを読んで「対数の以下の4つの性質が成り立つことを確かめ，理由を考える」ことを自力解決課題とした．

対数の性質　① $log_a MN = log_a M + log_a N$

② $log_a \frac{M}{N} = log_a M - log_a N$

③ $log_a M^r = r log_a M$　④ $log_a b = \frac{log_c b}{log_c a}$

次に，3 つのエキスパートグループに分けてそれぞれに以下の課題を提示，グループ毎に課題に取り組む．この際，後で他の生徒に説明できるように言語化することを促した．

エキスパートA：4つの公式の使い方の例と練習，言葉による説明
エキスパートB：指数法則（$a^m \times a^n = a^{m+n}$　等）の成り立つ理由の説明
エキスパートC：対数表示と指数表示の変換練習

その後，3人ずつ（人数の都合で1グループのみ4人）のジグソーグループで「4 つの公式が成り立つ理由を証明または説明する」課題に取り組みワークシートに記入，ジグソー活動後に各班の説明をマグネットシートに書き込み，代表者が黒板の前で発表した．最後に各班の発表を聞いて気づいたことや感想などを記入させた．1 時限目はジグソー活動の途中まで，2 時限目にその続きと発表を行い，授業後の自力解決は5日後に実施した．

2.3　実施時期

ジグソー授業：2016年11月29日・12月1日

2回目自力解決：12月6日

2.4　データの収集・分析の方法

①授業のワークシートについて授業前自力解決時および5日後自力解決時の記述レベルを比較した．

②授業実施 11 日後の 2 学期期末試験においてジグソー課題の証明1題と計算問題を，また3ヶ月後の学年末試験において計算問題の応用（対数を含む方程式と不等式）を出題し，それぞれについて，学習内容が適用できていたかについて調べた．

３．課題内容について

3.1　課題内容の選定意図

対数の計算につまずく生徒は多い．今回扱った対数の性質は，公式として一度覚えても，積と和，商と差の部分の覚え方が曖昧で，$log_a M + log_a N$ を $log_a(M+N)$ と，$log_a \frac{M}{N}$ を $\frac{log_a M}{log_a N}$ と混同してしまう答案が多々見受けられる．対数は「$a^p = M$」即ち「a を p 乗したら何になるか→ M」という，指数表示された関係式を別の方向から「a を何乗したら M になるか→ p 乗」と見る考え方であるから，指数表示された式について成り立つ性質（例えば $a^m a^n = a^{m+n}$，$(a^m)^n = a^{mn}$ などの指数法則）が，そのまま対数の性質に結びつく．指数の性質は理解しやすく，既有知識として定着している生徒が多いことから，これを利用して指数・対数の性質を言語化して整理することで新しい概念である対数の理解が促進されるのではないかと考えた．

今回，形式的には「公式が成り立つ理由を証明（または説明）する」ことをジグソー活動の課題としたが，実質的にはその課題を対話的に解決する過程において生徒たちが「定義や公式を試行錯誤しながら使ってみる」ことそのものが筆者のねらいであった．

3.2　エキスパート資料

エキスパート A，B，C の資料の具体的内容を抜粋して以下に示す．

エキスパートA
◎対数の4公式の使い方を理解する
（先述の4つの性質を示して）
☆使い方の例題
(1) $log_{10}15 = log_{10}3 + log_{10}5$

(1) は公式①を使っている．a=10，M＝ 3，N= 5と考えている

(4) $log_3 7 = \dfrac{log_2\ 7}{log_2\ 3}$

(4) は公式④の，a=3, b=7の場合である．c は（条件を満たしていれば）何でもよく，ここでは c =2とした．

（中略）

－対数の 4 公式の使い方を説明できるように言葉で表そう－

①では，log_aMN の真数は MN で，M と N の＿＿＿算 である．これが対数の＿＿＿算に変わっている．これは＿＿＿法則に似ている．

（答：かけ，足し，指数） （以下略）

図 1 エキスパート A の資料内容（抜粋）

エキスパート B

◎指数法則とその成り立つ理由を確認する

指数法則 ① $a^m \times a^n = a^{m+n}$

② $(a^m)^n = a^{mn}$ ③ $(ab)^n = a^n b^n$

指数の定義から指数法則の成り立つ理由を確認すると,,,

①が成り立つ理由：

m が正の整数のとき $a^m = a \times a \times a \times \cdots$ で

a を＿＿回かけたものである．

同様に，n が正の整数のとき，a^n は a を＿＿回かけたものである．

よって，$a^m \times a^n$ は a を＿＿回かけたものなので，$a^m \times a^n$ =＿＿＿＿になる．

（中略）

－法則①を説明できるように言葉で表そう－

①→底が同じ累乗どうしを＿＿算すると，＿＿は＿＿算になる．（答：かけ，指数，足し）

（以下略）

図 2 エキスパート B の資料内容（抜粋）

エキスパート C

◎対数表示と指数表示を変換する

対数と指数の関係

$a^p = M \Leftrightarrow p = log_a M$

真数

底

$log_a M$ を，a を底とする M の対数という．

た，M を $log_a M$ の真数という

例題

(1) $2^{3} = \boxed{8}$ だから $3 = \log_{2} \boxed{8}$

（以下略）

図 3 エキスパート C の資料内容（抜粋）

エキスパート A,B では言葉によって説明を書かせている．エキスパート C では言葉による説明はしづらいと判断してそうしたものを書かせなかったが，A,B と形式は異なってもやはり言語化をさせた方が良かったと感じた．（ジグソー活動時のエキスパート C 担当生徒は他のメンバーへの説明に苦労していた）

4． 結果と考察

4.1 授業前自力解決時の記述レベルとジグソー活動時の解決レベルの比較

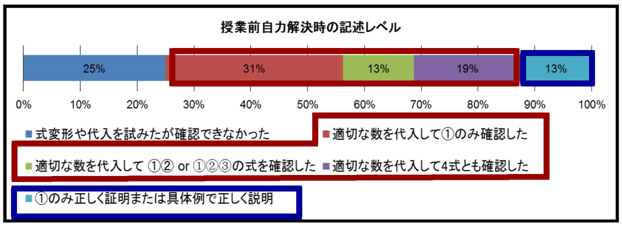

図 4 授業前自力解決時の記述レベル

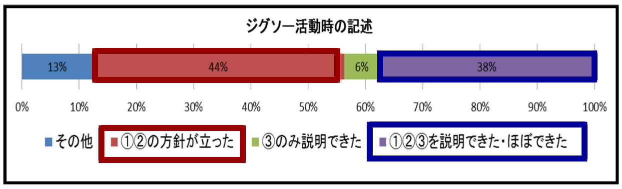

図 5 ジグソー活動時の記述

上記図 4 は，授業前 1 回目の自力解決時における記述レベルを，図 5 は，ジグソー活動時のワークシートに記入された課題の解決状況を示したものである．

1 回目自力解決時の状況は，公式に数を代入してみたものの，適切な数でないために成り立つことを確認できなかった，あるいは式変形を試みたがうまく行かなかった生徒が 4 名（25 %），公式に具体的な数を代入して証明すべき公式の 1 つ以上について，成り立つことを確認するにとどまった生徒が 10

名（63 %），①のみ説明できた生徒が 2 名（13 %）であった．

ジグソー活動時，4 つの公式をすべて説明できた班・生徒はなかったが，①②③の 3 つをきちんと説明できた生徒は 6 名(38%)，表記はうまくできなかったが説明の方針まで立った生徒は 7 名(44%)である．形式上の「課題」が解決できたかどうかという視点で見れば 38%は少なく見えるが，「試行錯誤して自分なりの解決方針を立てた」生徒まで含めれば 16 名中 14 名と大多数を占めた．

ジグソー活動では，各班で説明の記述がまとまるものと想定していたが，自分が納得に至らなかった部分は記述していない生徒が多かったのか，同じ班の中でも記述に相違が見られた．また，図 5 で「その他」に入った生徒の 1 人は，1 回目自力解決時に成り立つことを確認できなかった④の公式にこだわってジグソー活動のワークシートも④の説明に終始していた．

4.2 5日後自力解決時の記述レベル

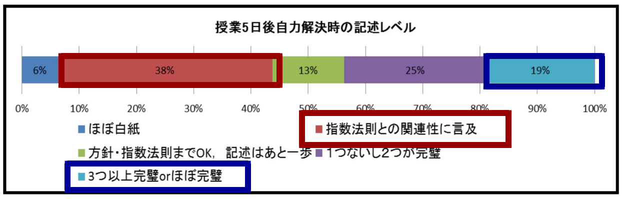

図 6　授業 5 日後自力解決時の記述レベル

図 6 は，授業 5 日後・2 回目の自力解決時における記述レベルを示している．ジグソー時に 6 名(38%)が公式①②③を説明できていたことから見ると 3 つ以上説明できた生徒は 3 名と半減している．残りの 3 名は，説明の方針は立っているが，全部または一部において，表記の仕方が不正確になっていた．

ジグソー時に①②の方針まで立てられた生徒は，2 回目自力解決時においても，指数法則との関連（累乗の積は指数の和に変換されること）に触れた記述をしており，ジグソー活動時に到達した理解のレベルをおおよそ保っていたことが窺われる．

図 5 および図 6 が示すデータをどのように解釈するかについては幾つかの考え方があり得るだろう．「正しい表記ができる」ことを理解の指標とすれば「理解が不十分な生徒が多い」となるが，指数法則で積が指数の和になることを使っている，分かっていることを 1 つの指標とすれば「多くの生徒はある程度理解できている」と判断できる．

今回の授業は「対数関数」単元の導入時に実施しており，もとよりこれだけで完璧な理解ができることを想定してはいない．生徒たちが「『この単元でどんなことを学ぶのか』の見通しをもつ」という視点で見れば一定の効果は見られたと言えるだろう．

4.3 期末試験・証明問題の記述レベルおよび公式の計算への適用

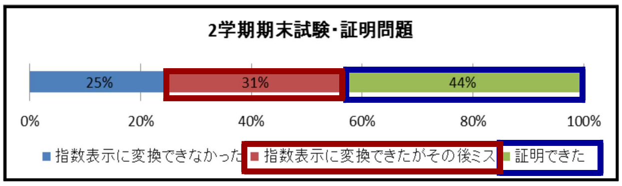

図 7　2 学期期末・証明問題

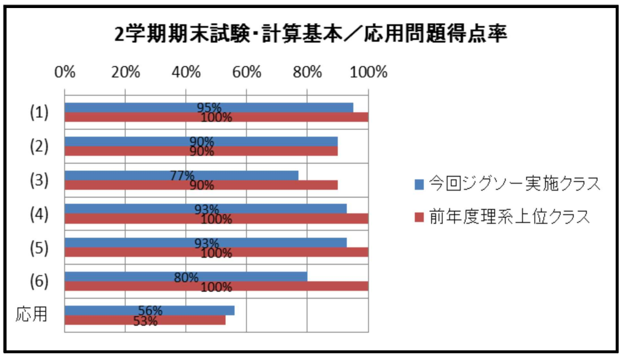

図 8　2 学期期末試験・計算問題得点率

図 7 は 4 つの公式のうちの 1 つを 2 学期期末試験に証明問題として出題し，その記述レベルを示したものである．図 8 では，同じ試験に出題した対数の計算問題の得点率を前年度の理系上位クラスと比較して示した．証明問題の正答者は 7 人と半数に満たなかったが，指数表示に変換するなど途中まで適切な式変形を行った生徒まで含めると 12 人(75 %)に達した．

一方，計算の基本問題の得点率は平均 87 %であり，前年度の理系生徒の 97 %には及ばないが，このクラスが文系で数学が苦手な生徒，受験に使わない生徒が多いことを考えると，かなりの高水準と言ってもよいだろう．なお，やや難易度の高い応用的な計算問題では前年度の理系上位クラスの得点率を上回る結果となった．

このことは，問題の出来が，学習した問題と形式が同じかどうかということより，学習過程において学習者がどのように思考していたかに左右される可能性が高いことを示唆している．

4.4 3ヶ月経過後の公式の定着度

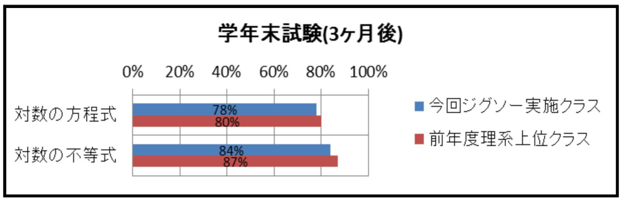

図 9 学年末試験・計算応用問題得点率

図 9 では 3 ヶ月後の学年末試験に出題した計算の応用問題の得点率を，図 8 と同様，前年度の理系上位クラスと比較して示した。何れも 8 割前後の得点率であり，ジグソー授業で扱った公式は全員が適用できていた．前述したように，これらの公式は一度覚えても，使い方において混乱する生徒が多いことを考えるとこの結果はかなり良いと言える．

厳密な論理を要求される証明問題の出来はそれほどでもないが，計算問題への公式の適用，および数ヶ月経過後における学習内容の保持については一定の効果があったと思われる．

5．生徒の意識の変化

本研究でジグソー法を実施したクラスでは，小単元ごとに学習内容・問題の解法を生徒自身が整理するプリントを配布した．また，各単元において，学習する式や概念を，それらのもつ図形的意味，言葉で表現すればどういうことか，を意識的に取り上げた．

以下は，ジグソー授業後および年度末にとったアンケートから，数学や数学の学習に対する意識の変化に言及している記述やジグソー授業での気づきについての記述を，数学の成績層別に示したものである．

成績上位層

・自分達で公式を証明すると，より理解が深まり，応用問題も理解が速くなるので，ただ公式に当てはめるだけではなくて公式を自分達で理解することが大切だと分かった．（ジグソー後感想・男子）
・皆で知識を共有すると新しい分野のものもある程度理解できるものだと感じた．今回は皆で考え合ったが自分一人のときでもまずは性質や公式の原理を考えてみたい．今回指数と対数には深い関係があるのが分かったように数学は分野は異なってもあらゆる部分でつながっているのだと感じた．（ジグソー後感想・男子）
・問題の考え方，アプローチの仕方，公式の原理など理解を深められました．（学年末・男子）
・解く手順などを整理して解こうと思うようになった．（学年末・女子）
・決まった公式以外にも沢山別解があることを知って面白くなりました．（学年末・女子）

成績中位層

・3 人の説明を組み合わせて証明するのが難しかった．log が指数を表しているということを頭の中で整理しておかないとだめだなと思った．（ジグソー後感想・女子）
・今回，このグループ学習法に取り組んでみて今まではただ公式を漠然と覚えているだけだったけど，自分の頭で考えることができて良かったです．（ジグソー後感想・女子）
・自分で一度理解したものを口に出して他人に説明することで，より整理されたものに再構築する．比較的，複雑な内容を学ぶのにこれがいかに重要かということを体感できた．（ジグソー後感想・男子）
・数学は数式を覚えてそれを使うだけという機械的なイメージがあったけど，1 つ 1 つの式にも意味があり，書いてあることは違うけど表しているものは同じである式や図を見ると，まるで式が図の暗号のように感じました．（年度末・女子）
・深く理解できた部分が増え，自分で答えを組み立てられるものが少しだけ増えた．（年度末・女子）

成績下位層

・みんなで自分の意見を話し合ったりするのは自分には思い付かないような意見がたくさん出るのですごく新鮮だった．自分で考えていることを言葉にまとめて話すのは難しかった．（ジグソー後感想・女子）
・新たなことでも，a や p や q などに置きかえていくと分かることがあるのだなと気づくことが出来ました．（ジグソー後感想・女子）
・公式を丸暗記するのではなく，成り立ちを理解した方が解きやすいし，覚えやすい．（年度末・女子）
・数学 1 つ 1 つがいろいろな分野につながっているようになった．（年度末・女子）

・自分で考える力がついた.（年度末・女子）

これらを見ると，成績上位層の生徒はジグソー授業時から，その授業の内容だけでなくより一般的な「数学の学習」について言及している．成績中位層・下位層の生徒はジグソー授業時にはそのときの内容に直結した気づきにとどまっているものが多いが，年度末には同様のことに言及する生徒が増えていることが分かる．数学の得手不得手によってかかる時間の差はあるが，それぞれに考えが深まった様子が窺える．

６．まとめ

「問題が解けるためには解き方を覚えて練習すればよい」という考えは，教師にも生徒にも根強く染みついている．今回の対数単元において筆者は過去に行った授業より計算練習を多く行った訳ではないが，結果は上述の通りであった．年度末のアンケートには，前章で記した以外にも「今まで分からないまま解法を暗記していて苦痛だったが自分で分かって解けるようになると嬉しかった」等の記述が見られた．

協調的な学習を通して生徒たちの思考が活性化することが，新しい概念や記号を内化し，形式の異なる問題への公式の適用や理解の深化・定着に効果をもたらすことが示唆されたと言えるだろう．

6.1 他分野への応用－エキスパート資料の分け方の一般化

今回の授業は，指数の拡張を学習した後で，指数の逆演算としての対数の導入で実施した．今回のエキスパートの分け方を一般化した形に分析を試みたい．

数学の『公式』は証明を求めない前提である「公理」とは異なり，定義や既知の性質から導き出される性質のうち頻繁に使われるものを「公式」と呼んで，数学を考える際に「便利に」使う，というものである．したがって「公式」は（多くの生徒はそうは考えていないが）「それがなければ（忘れたら）問題が解けない」ものではない．

筆者の意図は「いざというときに公式を忘れても，必要に応じて定義に戻って自ら導ける」ということである．

そのためにはどんな活動が有効だろうか．
一つは「ある程度馴染んだ経験」（ここではエキスパート A 使い方と練習），そしてもう一つは「成立理由を考えて納得した経験」（ここではエキスパート B の内容）であろう．今回はこれに加えてエキスパート C で指数表示と対数表示の変換をさせているが，これは「記号の表す意味」と言ってもよい．

こう考えると，例えば三角比の導入時に相互関係の３つの公式

$$\boxed{\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\ ,\ \sin^2\theta+\cos^2\theta=1\ ,\ 1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}}$$

を用いて同様のジグソーも可能ではないか．即ち，新しい概念が新しい記号とともに導入されるときに使える可能性がある．

6.2 今後の課題

本研究の過程では，新しい概念や記号の意味を大まかに理解できても，記号の使い方で混乱する生徒が多いことが見てとれた．また，証明のように厳密な論理展開が必要な問題ができるには，別な支援が必要と考えられる．これらについては今後分析していきたいと考えている．

謝辞

本稿の執筆に際し，貴重な助言を頂いた放送大学大学院の三宅先生，東京大学の白水先生に深く感謝する．また，議論の中で有益なコメントを頂いたゼミの皆様に感謝する．

参考文献

[1]三宅なほみ・白水始(2003)「学習科学とテクノロジ」放送大学教育振興会
[2]高垣マユミ(2010)「授業デザインの最前線Ⅱ」北大路書房
[3]東京大学・大学発教育支援コンソーシアム推進機構／自治体との連携による協調学習の授業づくりプロジェクト(2014)「協調学習　授業デザインハンドブックー知識構成型ジグソー法を用いた授業づくり」
[4]三宅芳雄(2012)「教育心理学特論」放送大学教育振興会
[5]永井香，(2016) "高校数学における思考の外化を促す活動とその効果", 2016 年度認知科学会第 33 回大会, pp.314-320