

オイラー図を用いたヘテロジニアス推論 —ルールベースとモデルベースの推論— Heterogeneous reasoning with Euler diagrams

竹村 亮[†], 片桐 恭弘[‡]

Ryo Takemura, Yasuhiro Katagiri

[†] 日本大学, [‡] はこだて未来大学

Nihon University, Future University Hakodate

takemura.ryo@nihon-u.ac.jp, katagiri@fun.ac.jp

Abstract

We introduce heterogeneous logic combining sentences and Euler diagrams to investigate the relationship between proof-based and model-based reasoning.

Keywords — 図形推論, ヘテロジニアス推論, オイラー図, 論理学

1. 証明ベースとモデルベースの推論
 - 1.1 論理学証明論と論理的意味論
 - 1.2 問題形式
 - 1.3 ヘテロジニアスな推論モデル
 - 1.4 Hyperproof
 - 1.5 オイラー図
2. オイラー図を用いたヘテロジニアス推論
 - 2.1 演繹的妥当性
 - 2.2 結論発見
 - 2.3 非妥当性
 - 2.4 前提発見
3. オイラー図を用いたヘテロジニアス推論の特徴
 - 3.1 推論効率
 - 3.2 証明ベースとモデルベースの推論

1. 証明ベースとモデルベースの推論

1.1 論理学証明論と論理的意味論

認知推論研究の分野では、1970年代以降フォーマルルール理論とメンタルモデル理論との間の論争がなされてきた。Rips [9] を中心とするフォーマルルール理論は、論理学における証明論的な推論理解に基づく理論である。推論は前提となる文から結論に至るまでいくつかのステップを経て mental proof を構成することによってなされ、そこでの中間的なステップは、直観的に明らかと認められる推論規則に基づく、と説明される。これらの推論規則や mental proof は、論理学証明論において Gentzen によって導入された自然演繹体

系の推論規則やその派生規則、および証明として考えることができる。

また Johnson-Laird [4] のメンタルモデル理論では、推論は前提となる文に関するメンタルモデルの構成によって行われるものとして説明される。ここでメンタルモデルとは、外界の事態のある種の内的表象とされ、論理的意味論における集合論的モデルの一種と考えられる。論理的意味論における文に対する集合論的モデルは、一般には無限個考えられる。一方でメンタルモデルは、推論者の経験や知識に依存して構成されるものであり、無限個のモデルのうちで、認知過程で考えられうる限りでの限定的なモデルである。

認知推論研究の分野では、これらのフォーマルルール理論とメンタルモデル理論の、どちらが実際にわれわれが行っている推論の適切なモデルとなっているかについてさまざまな議論がなされてきた。

論理学や数学の哲学においても、証明論と論理的意味論の関係についてさまざまな議論がなされているが、両者の関係を表すもっとも基本的な定理が完全性定理である。完全性定理は、「意味論的に妥当な文・論理式は証明可能である」ことを述べる定理であり、この逆の健全性定理と併せて、意味論的な妥当性と証明論的な妥当性が外延的に一致することを示している。したがって、推論の妥当性を考察する際には、証明ベースの推論と、モデルベースの推論のどちらか一方のみで充分であると考えられる。

しかしながら完全性定理はまた、「どんな文も、意味論的に非妥当（すなわち反例モデルが存在する）か、もしくは証明可能である」と言い換えることができる。この定理を現実的な問題解決の場面に適用すれば、主張が正しいことを示すためにはその証明を構成し、正しくないことを示すためには（反例）モデルを構成する、という戦略が可能であることを示している。したがって、このような観点からは、証明論・ルールベースの推論と論理的意味論・モデルベースの推論

は、どちらか一方ではなく、場合に応じた使い分けが示唆される。

1.2 問題形式

本稿では、推論が妥当なことを示す演繹的妥当性問題と、妥当でないことを示す非妥当性問題に加えて、結論発見問題や、アブダクションの一種である前提発見問題についても検討する。前提となる文・論理式 S_1, \dots, S_n と結論 S の間の論理的帰結関係を $S_1, \dots, S_n \models S$ と表すと、

演繹的妥当性 は $S_1, \dots, S_n \models S$ が成り立つことを示す問題である。

結論発見 は $S_1, \dots, S_n \models \boxed{?}$ が成り立つ結論 $\boxed{?}$ を探す問題である。

非妥当性 は $S_1, \dots, S_n \not\models S$ 、すなわち $S_1, \dots, S_n \models S$ が成り立たないことを示す問題である。

前提発見 は $S_1, \dots, \boxed{?}, \dots, S_n \models S$ が成り立つ前提 $\boxed{?}$ を探す問題である。

ルールに基づく証明の構成によって推論を行う証明ベースの推論（たとえば自然演繹）と、可能なモデルを構成し検証することで推論を行うモデルベースの推論（たとえば集合論的意味論やメンタルモデル）のそれぞれにおいて、上記の問題形式に応じて、論理学の観点からは以下のような推論戦略が考えられる。

● 演繹的妥当性

証明ベース の推論では、推論規則を用いて証明を1つ構成する。

モデルベース の推論では、前提が成り立つ可能なモデルをすべて枚挙し、それぞれのモデルにおいて結論が成り立つことを検証する。

一般には、モデルベースの推論では「すべての」モデルを検証しなければならないという困難が伴う。

● 結論発見

証明ベース の推論では、可能な結論を枚挙して、そのすべてに対して証明を1つずつ構成する。

モデルベース の推論では、前提が成り立つモデルをすべて枚挙し、そのすべてのモデルにおいて成り立つ結論を列挙する。

証明ベースの推論では、可能な結論をすべて枚挙した上で、証明を構成する（妥当性）か、もしくは証明が存在しない（非妥当性）ことを示さなければならない。それに対して、モデルベースの推論では、前提が成り立つモデルは一般に多数あるが、それぞれのモデ

ルは具体的であり、そこで成り立つ結論は証明ベースの推論と比べて限られる。

● 非妥当性

証明ベース の推論では、証明が存在しないことを示す。

モデルベース の推論では、反例（前提は成り立つが結論は成り立たないモデル）を1つ構成する。

証明ベースの推論では一般には可能な証明をすべて検証して、証明が存在しないことを示さなければならない。

● 前提発見

証明ベース の推論では、可能な証明を1つ構成しながら足りない前提を1つ見つける。

モデルベース の推論では、与えられた前提と結論が成り立つモデルを1つ構成して足りない前提を1つ見つける。

上記の証明ベースの推論の戦略は、論理学の証明探索法に基づくものである。これに対して、人工知能推論研究では、前提発見問題を結論発見問題に還元する方法が開発されている。（本稿2.4節参照。）

一般的には、対象（証明やモデル）が存在することを示すためには、その対象を1つ構成すれば良いのに対して、対象が存在しないことや、すべての対象においてある性質が成り立つことを検証するのは困難である。

このように、論理学の観点からは、モデルベースの推論と証明ベースの推論にはそれぞれの問題形式に応じて一長一短があることが伺える。

1.3 ヘテロジニアスな推論モデル

ここで注目されるのが、図形を用いた推論である。（図形推論については、Shimojima [10] や Allwein & Barwise [1] 等を参照。）もともとオイラー図等の図形は、集合論的モデルのインフォーマルな表現として用いられ、またメンタルモデル等のモデルベースの推論は、図によるイメージとそれに対する操作で説明されるのである。

論理的には、集合論的モデルは以下のように定義される。モデルは $M = (M, I)$ であり、

- M は個体の集合である。たとえば $M = \{socrates, plato, aristotle, max, kitty\}$
- I は個体記号と述語記号の解釈を定める関数で、個体記号 c について $I(c) \in M$ 、述語 A について $I(A) \subseteq M$ を満たす。たとえば、

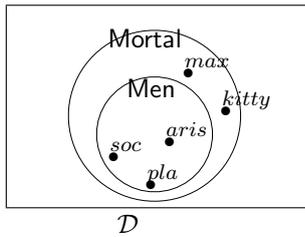
$$I(men) = \{socrates, plato, aristotle\},$$

$$I(mortal) = \{socrates, plato, aristotle, max, kitty\}$$

このモデルでは、*All men are mortal*が成り立つ。

上のモデルに対応するオイラー図は以下のように定義される。オイラー図 \mathcal{D} は以下の図形的対象が平面上に配置されたものである。

- 名前付点の集合 $pt(\mathcal{D})$
- 名前付円の集合 $cr(\mathcal{D})$



上の図からは、*All men are mortal*が成り立つことを読み取ることができる。

論理学における抽象的な集合論的モデルは、記号的対象である。それに対してメンタルモデルは、より具体的なイメージに基づくものであり、多くの場合には図形として考えることができる。

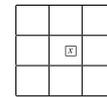
図形は一種のモデルとみなすことができる一方で、近年の図形推論研究では、図形をシンタクティカルな証明の構成要素として、論理式に対応するものとして扱えることが示されている。(たとえば、Shin [11]; Howse et al. [3]; Mineshima et al. [7]; Takemura [13] 等。) さらにこれらの研究に基づいて、文と図形を組み合わせたヘテロジニアスな推論の形式化および分析も進められている。(たとえば、Barwise & Etchemendy [2]; Hammer [5]; Swoboda & Allwein [12]; Plummer & Etchemendy [8]; Urbas & Jamnik [16, 17]; Takemura, Shimojima & Katagiri [15] 等。) 文と図形を組み合わせたヘテロジニアスな推論体系では、文に対する推論規則と、図形に対する推論規則、文から図形への変換規則、図形から文への変換規則などが形式化される。したがって、ヘテロジニアスシステムでは、文だけを用いた推論や図形だけを用いた推論に加えて、両者を組み合わせて行う推論をモデル化し、分析することができる。

メンタルモデルを図形とみなせば、文と図形を組み合わせたヘテロジニアスな推論モデルは、これまでのルールベースの推論とモデルベースの推論の両方を含み、さらには、場合に応じた使い分けが行われるような推論や、両者を組み合わせて行う推論をもモデル化し分析することのできる枠組みとなっている。

1.4 Hyperproof

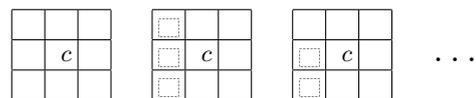
このようなアイデアは、とくに Barwise & Etchemendy [2] の Hyperproof の設計に顕著に見られる。Hyperproof では、四面体や立方体等の図形的対象の位置や大きさ、形に関して一階述語論理の論理式と blocks world による図形表現を組み合わせた推論が可能となっている。Hyperproof における blocks world はモデルとしての図形使用の典型であり、一階述語論理で証明ベースの推論が行われ、blocks world を用いてモデルベースの推論が行われる。

たとえば $\exists x(Small(x) \wedge Cube(x))$ (小さい立方体が存在する) は、以下のような図で表すことができる。(Hyperproof の blocks world は本来、 8×8 のチェス盤とその盤上の対象によって定義されるが、ここでは簡単のため、その中の 3×3 の部分のみに注目している。)

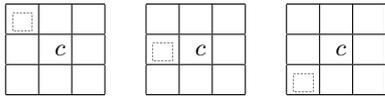


Hyperproof における blocks world はもともと、推論過程において新しい情報が加われば、その都度書き換えていくものとして導入されている。したがって論理学の観点からは、1つの blocks world は、言語にあるすべての個体や述語に対してあらかじめ解釈が定まった完全なモデルではなく、必要に応じて対象や述語の解釈を後から定めていく中間的なモデルに対応する。すなわち、上記の空白のマスは、何の対象も存在しないということを積極的に意味するのではなく、たとえば $\neg \exists x(Large(x) \wedge Cube(x))$ (大きな立方体は存在しない) のようなものは含意しない。

このような blocks world では、全称量化子 \forall を表現するのは非常に難しい。たとえば、 $\forall x(Cube(x) \rightarrow Left(x, c))$ (立方体はすべて c の左にある) は、 c の左には立方体は1つも存在しないかもしれないし、複数あるかもしれない。これを以下のような blocks world の選言で考えてみると、 3×3 に限っても8個の blocks world が必要となる。(破線の四角はサイズ不明の立方体を表す。)



立方体について言及する際には必ず立方体が存在する、という存在措定をおけば、 $\forall x(Cube(x) \rightarrow Left(x, c))$ は以下の3つの blocks world の選言として考えることもできる。



しかし、 $\forall x(Cube(x) \rightarrow Left(x,c))$ はさらに、 c の同列および右列には立方体が存在しないことを意味するが、上の図では c の同列および右列に立方体がないことを表現できていない。このように、blocks world では何らかの新たな装置を導入しない限り、 \forall 文と一対一に対応するような図形を描くことは困難である。実際、hyperproof では量子子、とくに \forall に関する推論は主に一階述語論理パートで行われるのである [2]。

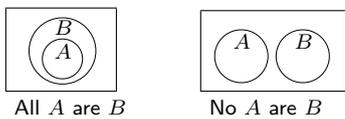
Entity-base の blocks world は、非常に素朴なメンタルモデルと考えることができるが、メンタルモデルでは \forall に関する問題を解決するために、集合を [] で表して以下のように表現している [4]。

[cube] Left(c)

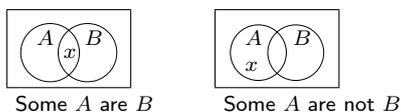
1.5 オイラー図

Blocks world のように具体的な個々の個体・要素を図で表す entity-base の図形に対して、抽象的な集合・性質を図で表す property-base の図形の代表的なものがオイラー図やヴェン図である。抽象的な集合を円で表すことにより、オイラー図やヴェン図では量子子 \forall を自然に表すことができる。

オイラー図システムはさまざまなものが開発されているが、本稿では Mineshima, Okada & Takemura[7] のオイラー図システムを扱う。[7] のオイラー図では、個体を表す名前付きの点 (a, x 等で表す) と性質を表す名前付きの円 (A, B 等で表す) の間の包含関係と排他関係のみが意味をもつ。たとえば、三段論法文 All A are B 、No A are B はそれぞれ、円 A と円 B の間の包含関係、 A と B の間の排他関係によって以下のように表される。



また、Some A are B 、Some A are not B はそれぞれ、点 x と円 A の包含関係および x と B との包含関係、 x と A との包含関係および x と B との排他関係によって以下のように表される。



ここで、われわれのオイラー図では包含・排他関係のみが意味をもち、円の間交差関係は特定の意味を

表さない。この規約により、三段論法文と上記のオイラー図は一対一に対応する。したがって、交差関係が Some A are B を意味する (上の Some A are not B の図形が Some A are B も含意する) ようなオイラー図と比べて、本稿で考察する [7] のオイラー図はより抽象度の高い図形となっている。

本稿では、三段論法文とそれに対する推論 (ただし厳格な三段論法には限らない) について、オイラー図と 1 階述語論理を組み合わせたヘテロジニアスシステムを基に検討する。もともとの [7] のオイラー図システムはヘテロジニアスシステムではなく、オイラー図のみを使った推論を扱うシステムだが、そこでの推論規則はそのままオイラー図と文・論理式に対するヘテロジニアスな推論規則とみなすことができる。

本稿では簡単のため、以下の三段論法文に関する推論に限って考察する: All A are B 、No A are B 、Some A are B 、Some A are not B 。これらはそれぞれ、1 階述語論理では、以下のような論理式で表される: $\forall x(Ax \rightarrow Bx)$ 、 $\forall x(Ax \rightarrow \neg Bx)$ 、 $\exists x(Ax \wedge Bx)$ 、 $\exists x(Ax \wedge \neg Bx)$ 。

2. オイラー図を用いたヘテロジニアス推論

以下では具体例をもとに、オイラー図を用いたヘテロジニアス推論について検討する。とくに比較のために本システムにおけるオイラー図を使わない推論、すなわち文・論理式のみを用いた自然演繹推論も検討する。これにより、オイラー図を用いたヘテロジニアス推論の特徴を分析する。

自然演繹での一般的な戦略は、与えられた前提をできる限り分解し、分解して得られた論理式を基に、結論を組み立てたり、証明が存在しないことを確認するというものである。このような証明探索に基づく戦略の正当性は、自然演繹の正規化定理および正規形証明の性質によって保証される。

他方で、オイラー図推論の一般的な戦略は、与えられた前提に含まれる情報を統合して合成図を構成し、そこから結論を読み取ったり、その合成図を変形するというものである。とくにオイラー図演繹推論の完全性 (妥当な推論にはすべて証明が存在すること) は [7] で、また反例構成の完全性 (非妥当な推論にはオイラー図で反例が構成できること) は [14] で示されている。

以下の分析は、論理学の知識のない素人が実際にどう推論を行っているかの分析ではなく、どう推論するのが効率的かという観点からの分析である。

2.1 演繹的妥当性

以下では次の推論を例として検討する。

- Some A are B, All B are C ⊨ Some A are C

自然演繹では、以下のような方法で推論の妥当性を示すことができる。

1. (自然演繹の除去規則を用いて) 前提をできる限り分解する。
2. 分解された論理式を組み合わせることで結論を構成する。

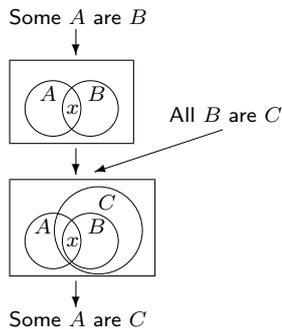
$$\frac{\frac{\frac{\exists x(Ax \wedge Bx)}{Aa \wedge Ba} \quad \frac{\forall x(Bx \rightarrow Cx)}{Ba \rightarrow Ca}}{Ba} \quad \frac{\exists x(Ax \wedge Bx)}{Aa \wedge Ba}}{Ca} \quad \frac{Aa \wedge Ca}{\exists x(Ax \wedge Cx)}$$

上の証明では、Aa, Ba, Ca を得るステップが前提の分解である。そうして得られた Aa と Ca を組み合わせることで結論を構成している。ただし上の証明は、正当な自然演繹の証明ではなく、∃ 除去規則はインフォーマルな形にしてある。(とくにこの形は論理的には妥当な規則ではないため注意が必要である。)

与えられた推論の妥当性を自然演繹で示すためには、証明を1つ構成すればよい。

オイラー図を用いて、以下のような方法で与えられた推論の妥当性を示すことができる。

1. 前提の1つを図で表す。
2. 残りの前提の情報を加えて、合成図を構成する。
3. 合成図で結論が成り立っていることを確認する。



Some A are B という前提を表すオイラー図に円 C を加えて合成図を構成する際には、C は B を含むように加えられるが、A と C の関係については何も新しい情報を生まないように、C は A と交差するように加えられる。こうして得られる合成図では、x と A の包含関係および x と C の包含関係が成り立っている

ため、Some A are C という結論を読み取ることができる。

モデルベースの推論では一般に、前提が成り立つモデルをすべて枚挙しなければならないが、オイラー図推論では合成図の数が限定される。とくに三段論法文に関する妥当な演繹推論では、合成図は1つに限られる [7]。

2.2 結論発見

以下の形の推論を検討する。

- Some A are B, All B are C ⊨ [?]

自然演繹では以下のような、基本的には妥当性問題と同じ戦略で結論を発見することができる。

1. 前提をできる限り分解する。
2. 分解された論理式を組み合わせることで結論を構成する。

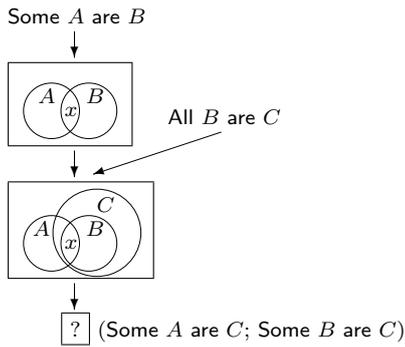
$$\frac{\frac{\exists x(Ax \wedge Bx)}{Aa \wedge Ba} \quad \frac{\exists x(Ax \wedge Bx)}{Aa \wedge Ba} \quad \frac{\forall x(Bx \rightarrow Cx)}{Ba \rightarrow Ca} \quad \frac{\exists x(Ax \wedge Bx)}{Aa \wedge Ba}}{Ba} \quad \frac{\dots}{[?]}$$

前提の分解は機械的にできるが、そうして得られた論理式を組み合わせることで結論を構成する際には試行錯誤が必要となる。

何でも良いから結論を1つ見つける場合には、分解して得られた論理式を適当に組み合わせればよい。それに対して、可能な結論をすべて枚挙する場合には、まず可能な結論の形について検討しなければならない。三段論法文に限っても単純に、量子化子 ∀・∃ (とそれに依って決まる結合子 ∧・→)、述語 (A・B・C)、否定あり・なし、述語 (A・B・C のうち最初の述語と同じものを除いた2通り) で、2×3×2×2 = 24通りの可能性がある。さらに、それらの結論の可能性のうちで、導けないものを検証する必要があるが、これは論理学の知識がないと困難である。

オイラー図を用いて以下のような、基本的には妥当性問題と同じ戦略で結論を発見することができる。

1. 前提の1つを表す図形を構成する。
2. 残りの前提の情報を加えて合成図を構成する。
3. 合成図から結論を読み取る。



結論を1つ見つける場合でも、可能な結論を列挙する場合でも、合成図を読めば良い。とくに上の例では、可能な結論をすべて読み取る際に、4つの図形的対象(円A, B, Cと点x)から2つの対象の間の関係を読み取るので、6通りの可能性となる。文・論理式の場合と比べると、大幅に可能な結論の数が減っているが、これは図形の幾何学的制約によって、可能なもののみが図に現れ、可能でないものは現れないことによる。

2.3 非妥当性

以下の2種類の非妥当な推論を検討する。

1. Some A are B, All B are C $\not\equiv$ Some A are not C
2. Some A are B, All B are C $\not\equiv$ Some C are not A

自然演繹によって与えられた推論の非妥当性を示すためには、証明が存在しないことを示さなければならない。すべての証明を検証することは不可能であり、そのために一般には証明探索を行うことで検証すべき証明の数を減らす。厳密な証明探索は論理学の知識がないと困難だが、現実的にも多かれ少なかれ証明探索のような試行錯誤をして証明が存在しないことを確かめる、と考えられる。(ただし、その場合でも本当に証明が存在しないことは厳密には言えない。)そこで、以下のような戦略で、与えられた推論の非妥当性を示すと考える。

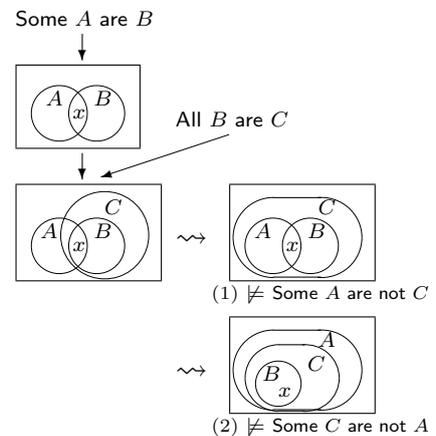
1. 前提を分解する。
2. 分解して得られる論理式では結論が構成できないことを確かめる。

$$\begin{array}{c}
 \frac{\exists x(Ax \wedge Bx)}{Aa \wedge Ba} \\
 \frac{Aa \wedge Ba}{Aa} \\
 \vdots \\
 \frac{Aa \wedge \neg Ca}{(1) \exists x(Ax \wedge \neg Cx)}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \frac{\exists x(Ax \wedge Bx)}{Aa \wedge Ba} \\
 \frac{\forall x(Bx \rightarrow Cx)}{Ba \rightarrow Ca} \\
 \frac{Aa \wedge Ba}{Ba} \\
 \frac{Ba \rightarrow Ca}{Ca} \\
 \vdots \\
 \frac{Ca \wedge \neg Aa}{(2) \exists x(Cx \wedge \neg Ax)}
 \end{array}$$

(1)の結論を構成するためには $\neg Ca$ ((2)では $\neg Aa$)を導かなければならない。しかしながら、前提を分解することで得られる論理式を組み合わせてもこれを導くことはできない。したがって、与えられた推論の証明は存在しない。(三段論法推論は最小論理の推論であり、正規形証明の部分論理式性という性質からこのことが理論的には分かる。)

オイラー図を使って以下のような戦略で、与えられた推論の非妥当性を示すことができる。

1. 前提の1つを表す図形を構成する。
2. 残りの前提の情報を加えて合成図を構成する。
3. 前提に含まれる有意味な情報(包含・排他関係)をすべて保持したまま、与えられた非妥当な結論の否定が成り立つように合成図を変形する。



(1)では、円AとCの間の(有意味でない)交差関係を包含関係に変形している。合成図をこのように変形しても、与えられた2つの前提が成り立っていることは変わらず、さらに結論の否定も成り立っている。すなわち、合成図を変形して得られる図形は、与えられた推論の反例を表す図形になっている。このような図形を反例図と呼ぶ。

同様に、(2)ではAとBの間、およびAとCの間の交差関係を、包含関係にそれぞれ変形して反例図を構成している。

もちろん、合成図に対してどのような変形を施してもよいわけではないが、一般には交差関係の包含・排他関係への変形、および新しい点の付加によって反例図を構成することができる。また、非妥当な推論には必ずオイラー図による反例を構成できることが示されている([14])。上記のようなオイラー図の戦略は、反例を1つ構成するというモデルベースの推論となっている。

2.4 前提発見

以下の2種類の前提発見推論について検討する。

1. $[\text{?}], \text{All } B \text{ are } C \models \text{Some } A \text{ are } C$
2. $\text{Some } A \text{ are } B, [\text{?}] \models \text{Some } A \text{ are } C$

自然演繹を用いて、これまでと同様に証明探索法に基づく戦略を考えることができるが、ここではよりシンプルな戦略を検討する。この戦略は人工知能推論研究で開発されたものであり ([6])、前提発見問題を結論発見問題に還元する方法である。たとえば上記(1)の問題は $[\text{?}], \forall x(Bx \rightarrow Cx) \models \exists x(Ax \wedge Cx)$ の $[\text{?}]$ を見つけることだが、 $[\text{?}]$ と結論の対偶を考えると、 $\neg \exists x(Ax \wedge Cx), \forall x(Bx \rightarrow Cx) \models \neg [\text{?}]$ の $[\text{?}]$ を求める結論発見問題に還元することができる。この方法に基づき、自然演繹で以下のような戦略を考える。

1. 与えられた結論の否定を前提に加える。
2. 前提をできる限り分解する。
3. 分解された論理式を組み合わせることで結論を構成する。
4. 得られた結論の否定を発見した前提とする。

$$\frac{\forall x(Bx \rightarrow Cx)}{Ba \rightarrow Ca} \quad \frac{\neg \exists x(Ax \wedge Cx)}{\forall x(Ax \rightarrow \neg Cx)} \quad \dots$$

$$\neg [\text{?}]$$

上の二重線部分は、いくつかの推論ステップの省略を表す。

$$\frac{\exists x(Ax \wedge Bx)}{Aa \wedge Ba} \quad \frac{\exists x(Ax \wedge Bx)}{Aa \wedge Ba} \quad \frac{\neg \exists x(Ax \wedge Cx)}{\forall x(Ax \rightarrow \neg Cx)} \quad \frac{\exists x(Ax \wedge Bx)}{Aa \wedge Ba}$$

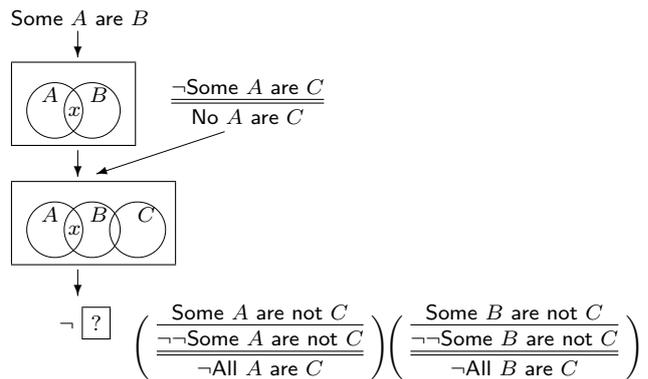
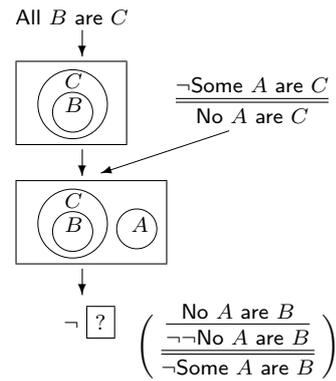
$$\frac{Aa \wedge Ba}{Aa} \quad \frac{Aa \wedge Ba}{Ba} \quad \frac{Aa \wedge Ba}{Aa \rightarrow \neg Ca} \quad \frac{Aa \wedge Ba}{Aa}$$

$$\dots$$

$$\neg [\text{?}]$$

オイラー図でも同様に、結論発見問題に還元することで、以下のように前提を発見することができる。

1. 与えられた結論の否定を前提に加える。
2. 前提の1つを表す図形を構成する。
3. 残りの前提の情報を加えて合成図を構成する。
4. 合成図から結論を読み取る。
5. 得られた結論の否定を発見した前提とする。



ここで、たとえば $\neg \text{Some } A \text{ are } C$ から $\text{No } A \text{ are } C$ を導くような否定に関する推論部分は、ヘテロジニアスシステムの言語パートで推論を行っている。図形の否定や対偶という概念を定義することで、この部分も言語パートを使わずに、オイラー図パートのみで行うことも可能であるが、図形の否定という概念はテクニカルで直観的でないためここでは扱わない。

3. オイラー図を用いたヘテロジニアス推論の特徴

本稿では、オイラー図を用いたヘテロジニアスシステムを用いて、演繹的妥当性問題、結論発見問題、非妥当性問題、前提発見問題におけるオイラー図を用いた推論と文・論理式のみを用いた自然演繹推論の分析を行った。上記のどの問題形式に対しても、それぞれの基本的な推論戦略は共通である。すなわち、自然演繹では証明探索法に基づく前提の分解と結論の構成であり、オイラー図推論では前提を統合した合成図の構成と結論の読み取りである。

3.1 推論効率

文・論理式の表現力に対して、図形はその幾何学的制約により、表現力は限られる。ただし推論においては、表現力が高いことが必ずしも有効であるとは限ら

ない。表現力の高さは一般に、探索空間の増大につながる。このことは結論発見問題に顕著に表れている。図形表現は一般に、表現力を限る（抽象度を下げて具体性を上げる）ことで、推論の効率化をはかることができる。

とくにオイラー図システムは、具体的な entity-base ではなく、より抽象的な property-base の図形であり、さらに本稿で考察した [7] のオイラー図システムは、円の間の交差関係が意味をもたないより抽象的なシステムである。具体的な図形表現でありながら、ある程度の抽象性を保持することで、本稿のオイラー図システムは比較的効率の良い推論システムになっていると考えられる。

3.2 証明ベースとモデルベースの推論

オイラー図をモデルに対応するものと見なせば、合成図の構成はモデルの構成に対応し、オイラー図推論はモデルベースの推論と考えることができる。それに対して、オイラー図をシンタクティカルな論理式に対応するものと見なせば、合成図の構成方法は妥当な推論規則と見なすことができ形式化することができる ([7])。このことはとくに、円の間の交差関係が意味をもたないという本稿のオイラー図の抽象性に依るところが大きい。これによって前提の情報を統合した合成図が限定される（妥当な三段論法推論では1つに限られる）のである。このような観点からは、オイラー図推論は証明構成に対応し、証明ベースの推論と考えることができる。

したがって、オイラー図推論は、モデルベースの推論としても、また証明ベースの推論としても考えることができ、モデルベースか証明ベースかといった伝統的な枠組みとは異なる枠組みを提供するものと考えられる。

参考文献

- [1] G. Allwein and J. Barwise, eds., *Logical reasoning with diagrams*, Oxford Studies In Logic And Computation Series, 1996.
- [2] J. Barwise and J. Etchemendy, *Hyperproof: For Macintosh*, *The Center for the Study of Language and Information Publications*, 1995.
- [3] John Howse, Gem Stapleton, and John Taylor, *Spider Diagrams*, *LMS Journal of Computation and Mathematics*, Volume 8, 145-194, London Mathematical Society, 2005.
- [4] Johnson-Laird, Philip N (1983). *Mental Models: Toward a Cognitive Science of Language, Inference and Consciousness*. Harvard University Press.
- [5] E. Hammer, Reasoning with Sentences and Diagrams, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, Volume 35, Number 1, 73-87, 1994.
- [6] Katsumi Inoue, Linear resolution for consequence finding, *Artificial Intelligence*, 56, 301353, 1992.
- [7] Koji Mineshima, Mitsuhiro Okada, and Ryo Takemura, A Diagrammatic Inference System with Euler Circles, *Journal of Logic, Language and Information*, 21, 3, 365-391, Springer, 2012.
- [8] D. Barker-Plummer and J. Etchemendy, A computational architecture for heterogeneous reasoning, *Journal of Experimental & Theoretical Artificial Intelligence*, 19(3), 195-225, 2007.
- [9] Lance J. Rips, *The psychology of proof: deductive reasoning in human thinking*, MIT Press Cambridge, MA, USA, 1994.
- [10] A. Shimojima, *Semantic Properties of Diagrams and Their Cognitive Potentials*, CSLI Publications, Stanford, CA, 2015.
- [11] Sun-Joo Shin, *The Logical Status of Diagrams*, Cambridge University Press, 1994.
- [12] N. Swoboda and G. Allwein, Heterogeneous Reasoning with Euler/Venn Diagrams Containing Named Constants and FOL, *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, 134, 153-187, 2005.
- [13] Ryo Takemura, Proof theory for reasoning with Euler diagrams: a logic translation and normalization, *Studia Logica*, 101, 1, 157-191, 2013.
- [14] Ryo Takemura, Counter-Example Construction with Euler Diagrams, *Studia Logica*, Springer, Vol.103, Issue 4, 669-696, 2015.
- [15] R. Takemura, A. Shimojima, and Y. Katagiri, A Logical Investigation on Global Reading of Diagrams, *Diagrams 2012*, LNCS, Volume 7352, 330-333, 2012.
- [16] M. Urbas and M. Jamnik, Heterogeneous Proofs: Spider Diagrams Meet Higher-Order Provers, *Interactive Theorem Proving*, LNCS, Volume 6898, 376-382, 2011.
- [17] M. Urbas and M. Jamnik, A Framework for Heterogeneous Reasoning in Formal and Informal Domains, *Diagrams 2014*, LNCS, Volume 8578, 277-292, 2014.