

高校数学における思考の外化を促す活動とその効果

Activities in High School Mathematics that Promotes Externalization of the Thoughts and the Effects

永井 香

Kaori Nagai

桜美林中学校・高等学校

J.F.Oberlin Junior and Senior High School

hzh02476@nifty.com

Abstract

In high school mathematics, many students don't understand the meaning of expressions or the terms clearly, and notice that they don't understand the content only after the examination. In this study, I examined if the thoughts of students were externalized through collaborative learning when students explained to each other (knowledge construction jigsaw method). I also used an activity where students describe the reflection of their learning routinely. These activities suggested that students understood meaning of expressions and the terms more deeply and that they got more conscious of study and their level of understanding.

Keywords — Externalization of Thoughts, Metacognition, Reflection, Collaborative Learning

1. はじめに

高校生の数学の答案を見ると、式や用語の意味理解が曖昧なゆえの間違い、なぜそうやって解くのかを意識しないままに解こうとするために起きる間違いが多い。

教師が一斉授業で講義を行う場合、生徒は板書を写すこと、説明を理解しようすることに集中し、自らの思考過程を意識することは稀であろう。それに対して生徒同士が説明し合うような状況では、必然的に、数学用語や式を頻繁に使うこととなり、自分の考えを分かってもらうために自らの思考過程を外化・言語化することが必須となる。そうであれば、田島(2007)の言う「学習した内容を他者に向けてわかりやすく解説したりするような表現活動によって、『分かったつもり』に陥っていて理解が不十分であったことへの気づきや、他者の視点を取り込ん

だり予想したりすることによる説明の工夫が促され、学習内容の理解が深まっていく」状況を生む協調的な学習を取り入れた授業デザインが有効と考えられる。

また、学習内容の理解度については、普段から「ここが分からない」と具体的に意識している生徒は少なく、試験を受けて初めて「分かっていなかった」ことに気づく生徒や、試験で問題を解いているとき「途中で何をやっているのか分からなくなった」という生徒もいる。日常的に自分の理解度を意識・記述させること、すなわち生徒のメタ認知を促すことは、自らの学習課題や学び方を意識させ、より深い学びを促すことにつながると考えた。

そこで本研究では、思考過程の外化・言語化を促す方法として知識構成型ジグソー法を、理解度を意識・記述させる方法としてリフレクションカードを用いた授業を通して、式や用語の意味理解および学び方についての意識にどのような効果が見られるかを探った。

2. 方法

2.1 対象生徒

本学高校2年生理系コース 2クラス 48名

2.2 活動

①知識構成型ジグソー法

自力解決→エキスパート活動→ジグソー活動
→発表

②リフレクションカード

生徒が自分の理解度の4段階評価と理解度について毎時間記入し、筆者がコメントした。

2.3 実施時期と単元名

①知識構成型ジグソー法

- 2015年 5月・ベクトル (クラス1)
6月・微分・積分 (クラス2)
10月・三角関数 (クラス2)

②リフレクションカード

2015年 9月～10月 (15回) 2次曲線 (クラス1)

2.4 データの収集・分析の方法

2.4.1 ジグソー法のデータ収集

生徒に記述させたワークシートについて、自力解決段階 (エキスパート活動前) でどこまで記述しているかのレベルとジグソー活動時の説明に用語や式、図を利用している延べ人数の割合を調べた。

また、10月の授業については、自力解決時からジグソー活動後の課題解決にどのような変化が見られたかを調べた。

2.4.2 リフレクションカードのデータ収集

リフレクションカードについては、記述量および記述内容の変化を調べた。記述量については、授業で扱った内容と記述量の推移の関連について分析した。記述内容については数学の内容や理解度に関して具体的に踏み込んでいない記述と具体的内容を含んだ記述の割合の推移を調べた。

2.4.3 学習内容の適用

それぞれの授業に関して、学習した内容が定期試験・実力試験の類似問題または問題に適用できたかどうかを調べた。

・ジグソー法授業

ベクトル：4日後中間試験・類似問題
8週間後実力試験・活用問題

微積分：2日後期末試験・類似問題

三角関数：3日後実力試験・活用問題

・リフレクションカード

2週間後中間試験・基本問題と応用問題

3. 内容・単元の選定意図

3.1 知識構成型ジグソー法

2015年5月に「ベクトル」、6月に「微積分」、10月に「三角関数」と扱った分野は異なるが、定期試験や実力試験を前にして、その分野のまとめとなる問題を取り上げることとした。

「基本問題は解けるけれど応用問題は苦手」とい

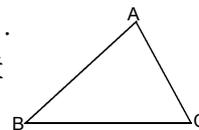
う生徒は多い。彼らのいう「基本問題」は学習したそのままの形にごく近いもの、また一つの知識・式で、あるいは一段階の手続きで解けるものを指していることが多い。それは学習した内容が一つずつ孤立した状態で存在していて、関連づけられていないためではないかと考えた。そこで「応用問題ではあるけれども重要な基本事項を組み合わせることで解くことができる」という視点で題材を選んだ。

①5月・ベクトルで扱った問題

$\triangle ABC$ の内部に点 P があり、次の式を満たしているとき、次の問に答えよ。

(1) 点 P はどのような位置にあるか。

(2) $\triangle PAB$, $\triangle PBC$, $\triangle PCA$ の面積の比を求めよ。



②6月・微積分で扱った問題

放物線 $C: y=x^2$ 上の点

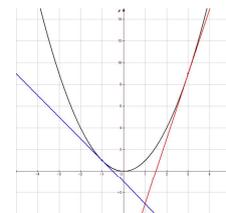
$A(-1, 1), B(3, 9)$ における

接線をそれぞれ ℓ_1, ℓ_2 と

する。放物線 C と2接線

ℓ_1, ℓ_2 で囲まれる図形の

面積を求めよ。



③10月・三角関数で扱った問題

図のように、原点 O を中心とする半径2の円の周上に2点 $A(2, 0), B(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ をとる。

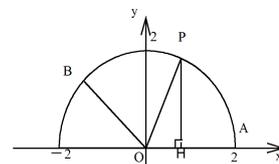
弧 AB 上に点 P を $\angle AOP = \alpha$ $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ と

なるようにとり、点 P

から x 軸に垂線 PH

を下ろす。また、

$\sin \alpha + \cos \alpha = t$ とする。



(1) $\sin \alpha \cos \alpha$ を t を用いて表せ。

(2) $\angle POB$ を α を用いて表せ。また、 $\triangle OBP$ の面積を $\sin \alpha, \cos \alpha$ を用いて表せ。

(3) 四角形 $OBPH$ の面積 S を t を用いて表せ。

また、 $\sin 2\alpha = \frac{4}{5}$ のとき、 S の値を求めよ。

①②③のどの授業においても、問題を解決するの

に必要な内容を3つの部分に分割してエキスパート資料を作成し、エキスパート活動後、3人ないし4人でジグソー活動を行った。

①②の授業では、各エキスパート資料に1つずつの数学の内容を割り振ったが、③は実力試験の過去問題であり、必要となる内容が多く、各エキスパート資料に2つずつの内容を割り振った。

3.2 リフレクションカード

数学Ⅲ「2次曲線」の授業で取り入れた。「2次曲線」の単元では、新しい用語や紛らわしい用語が次々と導入されること、楕円と双曲線の方程式や焦点を求める式がよく似ていて間違えやすいことなどから、生徒自身が「何が分かったか」「どこを難しいと感じているか」などを、頻繁に言語化して振り返りを行うことが有効と考えこの単元を選定した。

4. 結果

4.1 ジグソー法

4.1.1 自力解決段階の記述

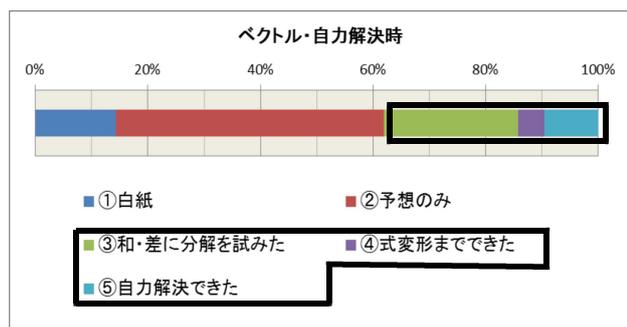


図1 5月ベクトル (クラス1)

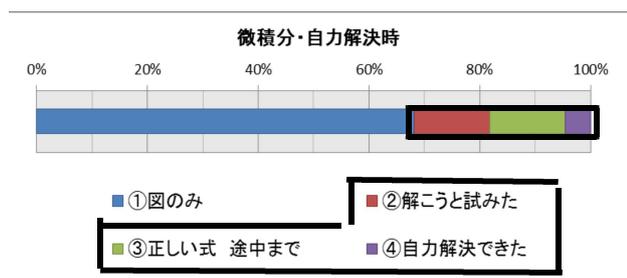


図2 6月微積分 (クラス2)

図1、図2は、5月と6月のジグソー授業時、自力解決段階の記述レベルについてその割合を示している。

この段階では、何らかの式を立てて解こうと試みた生徒を含めても3割強から4割弱と、問題を解く方針が見つけられない生徒が多数を占めた。

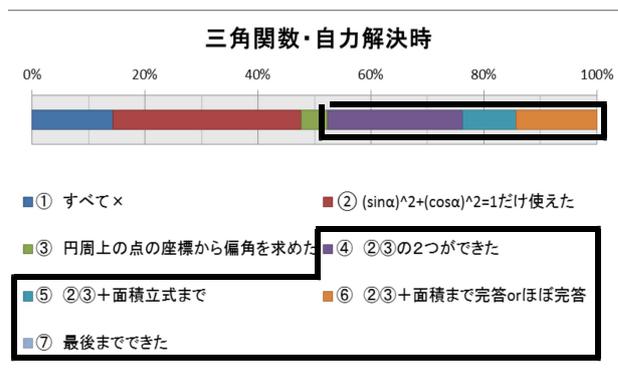


図3 10月・三角関数 (クラス2)

図3は10月のジグソー授業時、自力解決段階の記述レベルの割合を示している。実力試験を前に、前年度に学習した内容の復習として行った。

ここまでは知識が定着しているであろうと筆者が予想していた基礎を問う小問2問((図3)の②③に相当)のうち、一方((図3)の②)は8割の生徒が正答したが、両方できた生徒は5割弱であった。単独の知識としては分かっていたとしても、複雑な問題の中に埋め込まれているときにはそれを活用することはハードルが高いと言えるかも知れない。

4.1.2 ジグソー活動時の記述

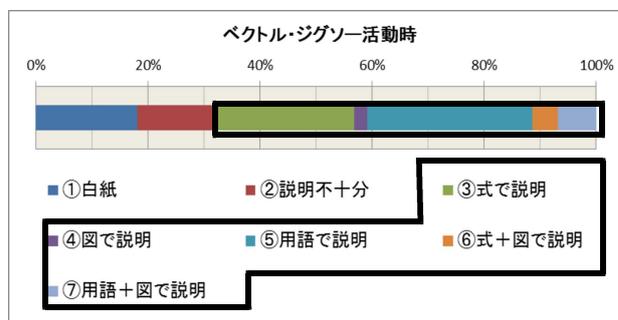


図4 ジグソー活動時の記述 (5月・ベクトル)

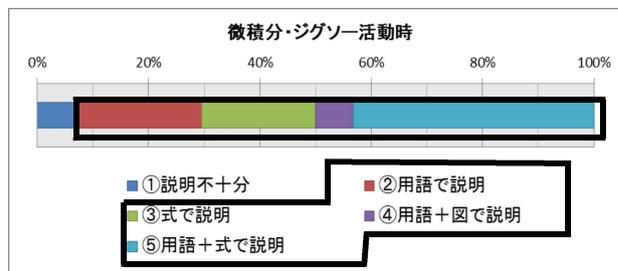


図5 ジグソー活動時の記述 (6月微分・積分)

図4、図5は同じ授業のジグソー活動時、他の生徒からの説明を受けた生徒がその内容を表現する際に利用したもの割合を示している。用語と図または式の両方を用いて詳しい説明を記述している生徒

が約半数おり、ほとんどの生徒が式または用語を用いた説明を記述した。自力解決時と比較して理解が大きく進んだと考えられる。

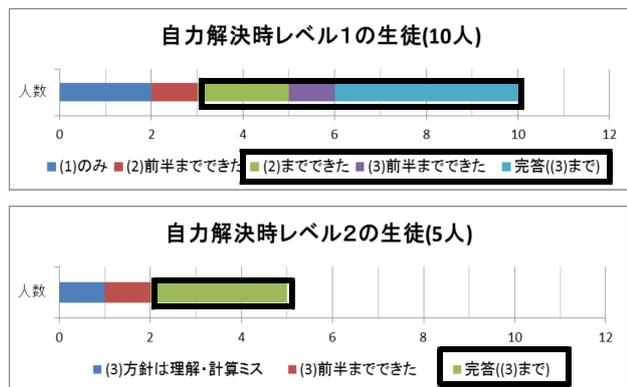


図6 三角関数・自力解決時レベル別・ジグソーの解決レベル

図6は、三角関数の自力解決時にどこまでできていたかによって生徒を3グループに分け、そのグループ毎にジグソー活動でどこまで課題を解決出来たかを示したものである。自力解決時にすべて不正解または(1)のみできた(即ち $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$ のみを使った)生徒(図3の①②に該当)をレベル1、(2)の前半(即ち、円周上の点の座標から偏角を求める)までできていた生徒(図3の④に該当)生徒をレベル2、それ以上をレベル3とした。

レベル1の生徒10人のうち、ジグソー活動で(2)後半まで、ないしそれ以上の解決レベルに達した生徒は7人、完答できた生徒も4人であり、レベル2の生徒は5人のうち3人が完答した。授業前における理解度や既習事項の定着度に差はあっても、生徒一人ひとりの理解が進んだことが伺える。

4.1.3 統合的理解を示す記述

3回行ったジグソー法の授業のうち、微積分のワークシートでは、22人中5人の生徒が「大事だと思ったこと」の欄に解法の手順のまとめを記述していた。例えば以下のような記述である。

- ・接線の方程式を使って直線 l_1 , l_2 の方程式を求める
- ・求めたい面積を2つに分ける
- ・計算する(積分する)ときにできるだけ簡単に解けるように公式を利用する

この5人のうち、4人は自力解決時には図を描い

ただけで問題を解く方針が立てられなかった生徒である。人数として多くはなかったが、問題が解けただけでなく、学習した内容の統合を図ろうとしたことが見てとれる。

4.1.4 類似問題・活用問題への適用

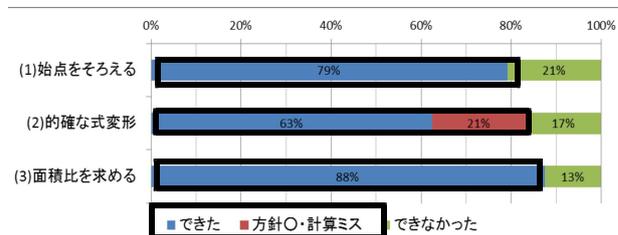


図7 ベクトル・中間試験類似問題

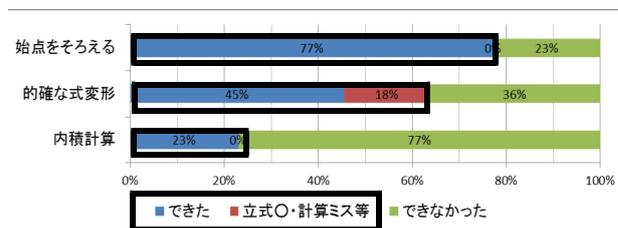


図8 ベクトル・8週間後実力試験活用問題

図7, 図8は、それぞれベクトルの授業4日後の中間試験における類似問題と8週間後実力試験活用問題においてジグソー法の授業で学習した内容(手法)が使えているかについて調べたものである。

中間試験では、(2)式変形において「できた」がやや少なかったが、立式までできた者を含めるとどの問題においてもおよそ8割の生徒が学んだ手法を使うことができていたことが分かる。

8週間後の実力試験では、授業で扱った問題とは全く異なる形式ではあるが、授業で扱った手法を利用する問題が出題された。(図7)を見ると授業で扱った「始点をそろえる」「(位置ベクトルの考え方をを用いた)的確な式変形」については6割から8割の生徒が少なくとも立式まではできていることが分かる。8週間という時間を経ていること、出題の形式が全く異なることを考えると、ジグソー法の授業を通して学習したことは、その時の問題が解けたということにとどまらず、「こういう場合にはこの手法が使える」という汎用性をもつ理解ををもたらしたと考えられる。なお、3番目の内積計算は前年度の既習事項ではあるが、今回の授業では扱っていない。

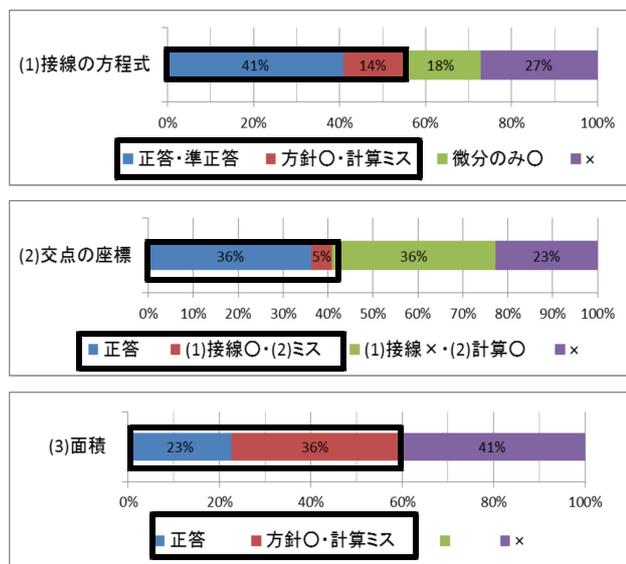


図9 微積分・期末試験類似問題

図9は、微積分の授業2日後の期末試験における類似問題において、ベクトルのときと同様、学習した手法が使えているかを調べたものである。

(2)は授業の中で使った知識ではあるが、「2直線の交点」(手順が1段階)を求める部分であり、ほとんどの生徒が難なく解けるので授業中にもあえて説明はしていない。(1)の接線の方程式を求めて(2)の交点で間違えた者は1名しかおらず、半面(1)の接線を求めるところで間違えたために正答できなかったものは多かったが、交点の計算自体はミスなくできた生徒は少なくとも7割はいたことになる。

接線の方程式、積分で面積を求めるなど3段階以上の手順を必要とする問題では計算間違いが多い。

接線の方程式は正答または方針は分かっているが計算間違いしたものを含めても6割弱と低調であった。解答の方針が立たなかった生徒は、微分したがその後何をすれば良いか分からなくなった、微分に気付かなかつた、「 y' =」と書いて積分した、など間違いの内容は生徒によって様々であった。(3)は正解または方針が立っていて正解に至らなかったものを合わせて6割弱だが、正解者は23%にとどまった。

以上の点を総合してみると、「2直線の交点を連立1次方程式を用いて求める」という中学校で学習し、手順が1段階の計算は大半の生徒ができるが、手順が何段階か含まれる難易度の高い問題では、正答率が下がるだけでなく、解答の方針が立たない生徒もかなりの数に上った。

その要因として、ベクトルの授業で扱ったものよ

りも手順を多く含む複雑な問題であったこと、微積分の授業を行ったクラスの方が数学の苦手な生徒が多かったことなどが考えられる。エキスパート資料の作り方や振り返り活動の時間設定など、より生徒の状況に即した授業設計が必要であろう。

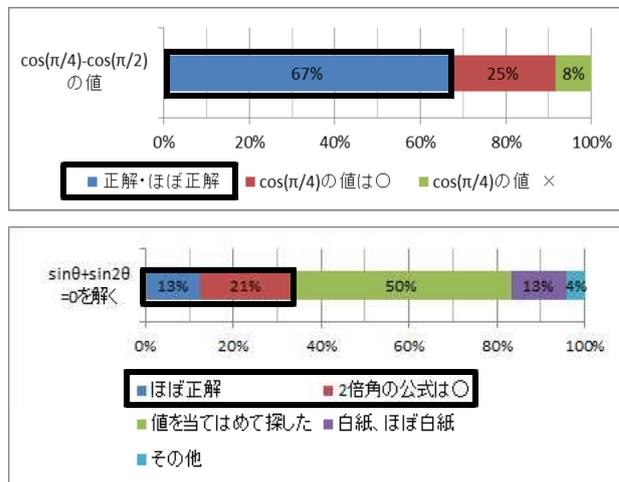


図10 三角関数・実力試験活用問題

図10は三角関数の授業3日後の実力試験に出題された三角関数の問題のうち、授業で扱った内容を活用する問題の出来について調べたものである。

出題された問題は

- (1) $\cos(\pi/4) - \cos(\pi/2)$ の値を求める
- (2) $\sin\theta + \sin 2\theta = 0$ を満たす θ の値 ($0 \leq \theta < 2\pi$) を求める
- ((3)は省略)

であるが、授業と直接関連する内容は(1)と(2)の途中途中(2倍角の公式を用いて変形するところ)までである。(1)のように単純な問題では学習した知識を使うことができる生徒が多かったが、見た目がかなり異なる問題(授業で扱ったのは図形問題、実力試験の出題は方程式問題)になると、活用することのできた生徒は約3分の1にとどまった。

4.2 リフレクションカード

4.2.1 記述量の推移

図11はリフレクションカードの記述量の推移を示している。既有知識との関連が見えやすい、適度な難易度、興味を引く題材などの授業時に記述量が増加していることが分かる。

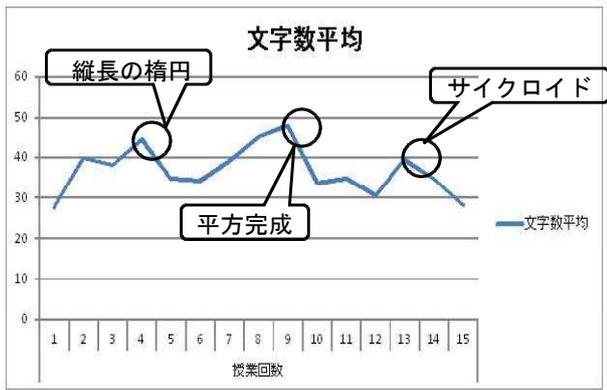


図 11 記述量の推移

4.2.2 記述内容の変化

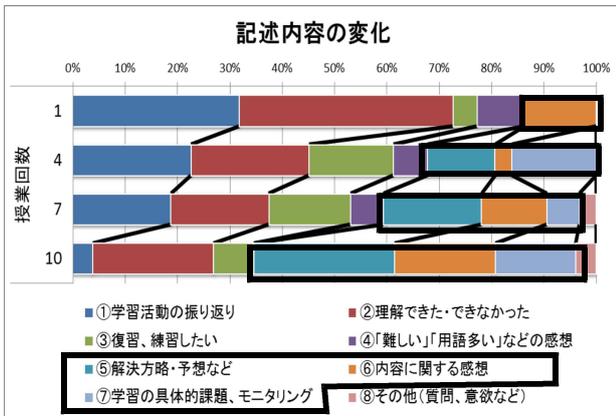


図 12 記述内容の変化

図 12 は記述内容の変化を示している。始めは「理解できた」「難しい」など具体的内容を伴わない記述が多かったが、回を追う毎に内容や理解度に関する具体的内容を含んだ記述が増え、記述内容が深まっていると言える。

1 回目の記述例

- ・これから軌跡に近いことをやりました。
- ・図の意味が理解できました。2 次曲線が何か分かりました

7 回目の記述例

- ・楕円の頂点の位置の関係から双曲線における頂点の位置を導き出すことができた

10 回目の記述例

- ・2 次方程式ならどんな形でも判別式が使える。もっと高次な式に判別式はあるのか。

11 回目の記述例

- ・放物線などの焦点の求め方は覚えていたが、定義を間違えて覚えてしまっていた

4.2.3 類似問題（基本・応用）への適用

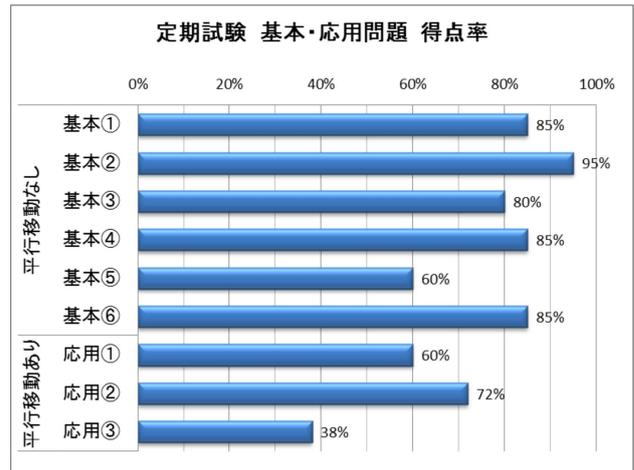


図 13 中間試験・類題の得点率

2 次曲線を学習した 2 週間後に行われた定期試験に基本問題を 6 題、応用問題を 3 題出題した。

図 13 はそれぞれの得点率である。基本問題で 8 割前後、応用問題でも方針が立てられた者を含めて 6 割前後とある程度学習内容が保持されていたと考えられる。

5. 考察

一斉授業で一通り学習しても、複数の知識を統合させる必要のある問題を一人で解ける生徒は少ないが、ジグソー活動を通して、多くの生徒が式や用語を用いて説明することができ、あるいは一人ひとり既有知識の異なる生徒がそれぞれに理解を深めた。また、リフレクションカードの記述量は授業内容に左右される部分が多いものの、内容は「難しい」など単純なものから数学の内容や自分の学習課題に具体的に踏み込んだものに変化していく様子が見られた。

ジグソー法のように思考の外化・言語化を促す活動は、式や用語の意味理解を深めること、リフレクションカードのように自らの理解度を意識・記述する活動は学習内容や理解度、学習課題についての意識を高めることが示唆されたと言えるだろう。

本研究では、知識構成型ジグソー法とリフレクションカードの 2 つの実践を行ったのであるが、ここでこれらの関係を考えたい。

両者の相違点は、前者においては学びの過程に他者との対話が介在するが、後者にはそれが存在しないということである。生徒はリフレクションカードに記述をするとき、自らの理解度を個人内で省察、振り返りを行う。これに対して、ジグソー法におい

ては他者の考えを聞くことで、1人では気づかなかった視点を獲得する、自らの間違いに気付く、あるいは他者に説明するために自らの理解を改めて見直し、言語化する必要に迫られる、など学びが深まる状況がより起こりやすいと言えるだろう。

また、理解した内容を「問題を解く」ことにどの程度適用できるかという点においては、生徒一人ひとりの既有知識や計算スキルの差、問題の難易度など多くの要因が影響すると考えられ、本研究では十分に明らかになってはいない。しかしながら、少なくとも授業で扱った問題の類似問題や基本問題に関しては多くの生徒がある程度適用できていたとは言える。知識の活用可能性については、上述のような要因の影響を考慮に入れた上で、どのような生徒にどのような教示や活動、課題設定が有効なのか、更に検討が必要であると考えている。

謝辞

本稿の執筆に際し、貴重な助言を頂いた放送大学大学院の三宅先生、白水先生に深く感謝する、また、議論の中で有益なコメントを頂いたゼミの皆様にも感謝する。

参考文献

- [1]高垣マユミ, (2010), 授業デザインの最前線Ⅱ, 北大路書房
- [2]東京大学・大学発教育支援コンソーシアム推進機構／自治体との連携による協調学習の授業づくりプロジェクト, (2014), 協調学習 授業デザインハンドブックー知識構成型ジグソー法を用いた授業づくり
- [3]三宅芳雄, (2012), 教育心理学特論, 放送大学教育振興会
- [4]三宅なほみ・白水始, (2003), 学習科学とテクノロジー, 放送大学教育振興会
- [5]白水始・三宅なほみ, (2009), 認知科学的視点に基づく認知科学教育カリキュラムー「スキーマ」の学習を例に, 認知科学, 16, pp. 348-376
- [6]田島充士, 2007, 教育場面での説明実践と評価, 比留間太白・山本博樹(編) 説明の心理学ー説明社会への理論・実践的アプローチ, ナカニシヤ出版