リスク下の選択における認知的資源配分：注目の枠組みの最適性
Cognitive Resource Allocation in Choice under Risk: The Optimality of Attentional Frame

犬童 健良†
Kenryo Indo

†関東学園大学
Kanto Gakuen University
kindo@kanto-gakuen.ac.jp

Abstract

This article reexamines a known experimental result of a version of the Allais' paradox a series of four pairwise gamble choice problems with additional queries about rank values of the decision maker's cross-attentions by focusing a pair of possible outcomes of the compared gambles for every hypothetical choice. For each choice problem we could found that there are unanimous rules that can be extracted from the attentional frame data inhibiting a special values of ranks such that $\rho(Z) > \rho(X) > \rho(Y)$ for some triple of cells X, Y, and Z where $\rho(\ )$ is stands for the rank function of each respondent. In many cases, cell Z has a regret, i.e., regret means that the hypothetically selected gamble is inferior to the remaining gamble in the focused possible outcome pair, and Y is not a regret cell (i.e., a rejoice cell). This article proposes a hypothetical view that cognitive process of the decision maker is a sort of resource allocation problem (i.e., allocating attentions) between brain (as a resource-manager) and ego (as a resource-user) and argues its formalization based on optimization, especially, the LP duality theory with Horn-clause logic programs as the computational counterpart so as to provide a possible theoretical explanation and simulation to the *attentional frames* of the real people.

Keywords — Allais' paradox, attentional frame, cognitive resource allocation problem, duality

1. はじめに

２つの代替案イとロがあり，いずれか一つを選べるとする．もし代替案イを選ぶとすると，代替案ロは，イの結果を得るために手放されるための代償（機会費用）と考えることができる．本論文では「もし別の代替案を選んでいたら，どのような結果が得られただろう.」と考えることが，意思決定にどのように影響するのかについて，実証データを分析し，上述のような（反事実的）条件文の理解に相当する認知モデルを考案する．

本論文で言う交差的注目とは，２つのギャンブルを比較して一方を選んだと仮定したとき，その可能な結果と，選ばなかったギャンブルの可能な結果をペアについて意識することである．交差的注目がアレの背理を解く鍵となりうることは，Bell (1982)や Loomes & Sugden(1982) によって示された．本論文ではギャンブル選択問題の交差的注目についての実験研究（犬童、2013, 2014）のデータを再分析する．この実証データには，X が Y より強く意識されないとき，Z より X が強く意識されることがないといったパタンが多数存在する．一方が意識されたとき，他方が意識されにくい現象は，線画立方体の奥行知覚など錯視の研究ではよく知られる．本論文では交差的注目の相補性を XYZ ルールと呼ぶ．その数学的なモデルは，$F(z) \geq 0$, $z^T F(z) = 0$ となる非負ベクトル $z \geq 0$ を見つけることである（相補性問題）．

本論文では交差的注目のランク設定を認知的資源配分問題と呼び，線形計画法の双対性理論，ゲーム理論，線形相補性問題などの数理モデルを援用して交差的注目の相補性を解釈する．また論理プログラムとの対応を論じる．

以降の部分では，第 2 節で注目の枠組み付きのアレの背理の実験を紹介する．第 3 節で交差的注目の相補性（XYZ ルール）について述べる．第 4 節では線形計画法(LP)を適用して注目の枠組みを認知的資源配分として解釈する．第 5 節で論理プログラミングに翻訳し，第 6 節でゲーム論的メカニズムに一般化する．第 7 節で確率加重関数との比較を論じる．最後に第 8 節でまとめとする．

表１　アレの背理の追試*

選択問題	代替案	賞金額	確率	選択比率
Q1	ギャンブルA	400万円	80%	26%
	ギャンブルB	300万円	100%	74%
Q2	ギャンブルC	400万円	20%	38%
	ギャンブルD	300万円	25%	45%
Q3	ギャンブルE	500万円	10%	47%
		100万円	89%	
	ギャンブルF	100万円	100%	47%
Q4	ギャンブルG	500万円	10%	60%
	ギャンブルH	100万円	11%	31%

*犬童(2013）の実験結果より．

2. ギャンブル比較と注目の枠組み

表１に示されるギャンブル選択問題Q1～Q4は，経済学者や心理学者の間でアレの背理(Allais, 1953)として知られるもので，現実の回答者の多くが，Q1やQ3で確実な代替案の方を選ぶが，Q2やQ4ではより賞金額の高いギャンブル（または無差別）を回答する比率が増える．この現象は期待効用理論に反する．実際，Q2はQ1の当選確率を1/4に縮小したものであり，またQ4はQ3から共通する89%の100万円分を削除したものである．そこで，こうして生じる選好逆転を共通比効果や共通結果効果と呼ぶ文献もある．表１の右端の列（選択比率）は上述の傾向が追試において再現されたことを示す．ただしこの実験では無差別(T)も選択できるため，リスク選好が一貫する選択の組合せは，AC，BD，EG，FH，およびTTである．

本論文では，意思決定者が選択可能な２つのギャンブルを比較し，一方を選んだとき，その可能な結果と，選ばなかった方のギャンブルの可能な結果をペアにした積事象について意識することを，交差的注目と呼ぶ．また交差的注目の対象（仮想的選択の条件下で比較される可能な結果ペアのこと）をセルと呼ぶ．

例えばQ1では以下の４つのセルがある．

1. 仮想的選択：A，A：400万円，B：300万円
2. 仮想的選択：A，A：0円，B：300万円
3. 仮想的選択：B，A：400万円，B：300万円
4. 仮想的選択：B，A：0円，B：300万円

同様に，Q2とQ4に８通り，Q3に６通りのセルがある．また本論文では，後悔と安堵の質的な区分を設ける．（仮想的に）選ばなかった方の結果が勝る場合を後悔のセル，後悔のセルでないセルを安堵のセルと呼んで区別する．各セルCの注目のランクρ（C）は，回答者が５段階評価で与えた「気になる程度」を，１から５の整数に対応させたものである（１：たいへん気になる，２：やや気になる，３：どちらともいえない，４：あまり気にならない，５：まったく気にならない）．なお，表１の選択結果および注目のランク回答値のローデータ96件は犬童(2014)に採録されている．

本論文で言う注目の枠組とは，ある選択問題（２つのギャンブルの比較）において，あるいは複数の選択問題にわたって，交差的注目のランクρの値を全セルにわたって組にしたものである．上記の手法から得られたデータは，リスク選択とその系統的変化を説明するための重要な手がかりを与える．詳しくは前出の論文に譲るが，とくに有用と思われるのは以下の観察であろう．

観察１：平均的に，後悔のセルは安堵のセルよりも注目が強い傾向がある．またリスクの大きいギャンブルを実際に選択した群は，すべての後悔のセルで，より安全な方を実際に選んだ群と比べてより注目が強い．

観察２：同一被験者において，後悔を避ける傾向はリスクを選ぶ傾向よりも安定しており，このため注目の枠組みは，リスク選好の変化を予測するために役立つ．

もし読者が主に行動予測に関心を有するのであれば，この問題への興味はここまでかもしれない．一方，次節で述べるように，現実の人々の行うリスク選択の共変量としての交差的注目のデータから抽出される含意関係は，意思決定者の行う情報処理の比較的安定した構造を示している．

ちなみに，注目の枠組みがゲームの利得表に似るのは偶然ではない．交差的注目の実験は，確率論的には同じ事象である両クジの同時結果が，仮想的選択の立場（セル）から注目したときに，必ずしも同じ応答（気になる程度）をしないという予想に基づく．

3. 交差的注目の相補性：XYZ ルール

アレの背理における交差的注目データから，もうひとつの興味深い事実が見いだされる.それは，ρ(Z) ＞ ρ(X) ＞ ρ(Y) という注目ランク間の関係が1件もない3つ組(X, Y, Z) が4つのギャンブル比較の問題それぞれについて存在するということである．このようなパタンを XYZ ルールと呼ぶことにする.

表2　XYZ ルールの分布**

賞金の差	X	Y	Z	計
+	30	30	15	75
−	25	11	48	84
0	13	27	5	45
計	68	68	68	204

**犬童(2014, p.68)の図6に掲載された全68件の XYZ ルール．XYZ ルールは注目ランクが Y，X，Z の順の回答が96件中0件だったもの．全68ルールの内訳は Q1 が1件，Q2 が24件，Q3 が12件，Q4 が24件である．数値は各ルール中で X，Y，Z の出現回数であり，賞金の差がプラス（+）とゼロ（0）の行は安堵，マイナス（−）は後悔のセルに対応する.

実験データ内の XYZ ルールの分布を調べると，*Z*が後悔のセルで *Y*が安堵のセルの場合が比較的多い（表2参照）. すなわち，後悔（Z）が安堵（Y）よりも注目されやすく，その中間に基準となるセル（X）が位置するが，その反対の順序は現れにくいということである（このようなパタンを，Z と Y に一定の注目の差があると仮定した乱数シミュレーションによって再現することは可能である．しかしこの乱数実験は系統的な注目の差異がなぜ生じるのかということは説明しない).

また, XYZ ルールは「X よりも Y が注目される」ことと，「Z よりも Y が注目される」ことが同時に生じないという条件と同じである．この相補性に着目すると，現実の意思決定者の情報処理について何らかの手掛かりが得られるのではないかと考えられる.

ランク値は1～5の整数だが，連続緩和により，

$u = \rho(X) - \rho(Y), \quad v = \rho(Z) - \rho(X)$

とおく．XYZ ルールは2変数の非負部分 u^+と v^+が，一方が正のとき他方はゼロとなるという条件（$0 \leq u^+ \perp v^+ \geq 0$）と一致する.

図1はQ1における唯一の XYZ ルールを，(u, v)-座標上にプロットしたものである．ここで X は仮想的選択 A の下で A が 400 万円のセル（安堵)，Y は，仮想的選択 B の下で A が 0 円のセル（安堵)，Z は仮想的選択 A の下で A が 0 万円のセル（後悔）に対応する．もちろん，いずれのセルも，B の結果は 300 万円である.

図1から分かるように，データの多くは左下半平面 $\{(u, v) \mid u + v \leqq 0\}$ にある（約91%)．また原点や半平面の境界線上，および縦軸 $u = 0$ の $v < 0$ の部分にデータの集まりが見られる（原点（0, 0）が11件, (-1, 1）が10件, (0, -4）が7件，(0, -3）が5件).

Q1 ではより確率の大きい B を選ぶ場合にセル X を基準として後悔のセル Z をより強く意識する傾向が見られる．図1の群 r（Aを選択した回答者）と群 s（Bを選んだ回答者）の群平均値は *v* に 0.57 の差がある（u の差は0である)．このため，一見，前節の観察1に反するが，これはリスク選好時に X と Y が同時により強く意識される共変量であるということを意味する（統計学におけるシンプソン背理に通じる).

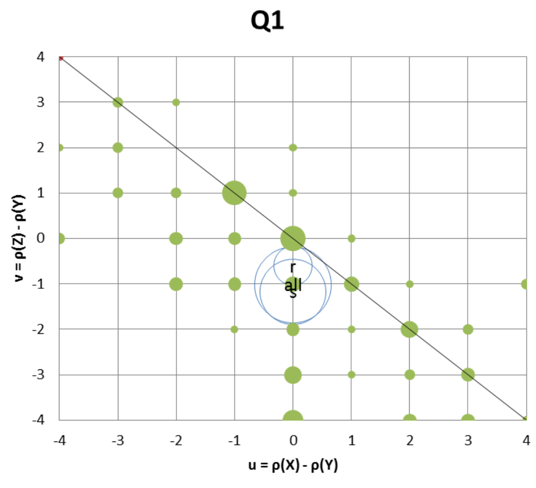

図1　Q1 の XYZ ルール. 円の面積は各(u, v)の件数に比例する．また r と s は実際の選択が A，B の場合の各群の平均値, all は全体の平均値を表す．右下45℃線は u + v = 0（ρ(Z) = ρ(Y)) を示す.

表 2 に示したように，X を基準として Y が安堵で Z が後悔であるルール（Q1 の場合が図 1）は，Q2〜Q4 にわたって多く存在している．このような XYZ ルールは，各セルの情報を集約しながら比較対象の優劣を判断する際，多くの現実の意思決定者に共通する注目の枠組みの特徴を捉えたものと考えられる．次節では LP の双対性理論を援用して，XYZ ルールがどのように注目の枠組みを安定化させているのかについて考察する．

4. 注目の枠組みの最適性

XYZ ルールに現れる相補性は，線形計画法（LP）の緩和問題における主問題（P）と双対問題（D）のいずれかが実行可能であるということと論理的に等しい．

$$(P)\, x^T c \to \max.\, s.t. \cdot b - Ax \geq 0$$
$$(D)\, y^T b \to \min.\, s.t.\, A^T y - c \geq 0$$

ただし $x, c \in \mathbf{R}^n$， $y, b \in \mathbf{R}^m$， $x, y \geq 0$， $A \in \mathbf{R}^{nm}$ とする．なお，$\cdot^T$ は行と列の転置である．これらのベクトルや行列は隠れた認知活動のモデルとして意図される．詳しくはこの後で説明する．

LP（緩和問題）を適用すると，認知的資源配分問題は以下のように述べることができる．

認知的資源配分問題

ベクトル x は注目を配分する意識的活動（モニタリング）を表すと考えられる．心の活動 x が生み出す表象，つまり主問題(P)における $c^T x$ の最大化は，できるだけ多くのことを知るという目的の追求を意味する．また b は活動 x のため入力される資源（注目）の使用量 Ax の上限である．制約条件 $b - Ax \geqq 0$ を満たす x は主問題(P)の実行可能解と呼ばれる．

一方，双対問題(D) の意味は認知的活動における費用節約である．変数 y は資源の価格であり，$b^T y$ は資源に対する支払い，$A^T y - c \geqq 0$ は活動ごとの採算性である．

LP の双対理論は図 1 の特徴を簡潔に説明する．

$$-u = \rho(Y) - \rho(X) = y^T \cdot (b - Ax) \geq 0 \cdots (1)$$
$$-v = \rho(X) - \rho(Z) = x^T \cdot (A^T y - c) \geq 0 \cdots (2)$$

(1)と(2)の変数が， $u = v = 0$ となる条件は最適性の必要条件であり，相補スラックネス条件と呼ばれる．これは非線形計画法（NP）の KKT 条件に現れる相補性の特殊な場合でもある．

LP の双対性理論：(P)と(D)の一方に最適解が存在すれば他方にも最適解が存在し，両者の値は一致する．

$$y^T b = x^T c \quad \cdots (3)$$

注目の枠組みにおける双対性

相補性条件(1)と(2)とベクトル x, y の非負性から，上の条件は，

$$u > 0 \Rightarrow v \leq 0$$

つまり，「もし(P)が実行不可能であれば(D)が実行可能」であり，また

$$v > 0 \Rightarrow u \leq 0$$

つまり「もし(D)が実行不可能であれば(P)が実行可能」であるということを意味する（LP の双対定理では一方が実行不可能であるとき，他方は非有界である．しかし，u, v の値は区間[-4, +4]に収まる）．

ところで（1）と（2）において，

$$\rho(Y) = y^T b, \quad \rho(Z) = x^T c \quad \cdots (4)$$

とすると，Z への注目が弱いほど主問題（P）の目的関数の値は大きくなり，Y への注目が強いほど双対問題（D）の目的関数の値は小さくなる．

もし(1)と(2)が共に等号で成立するなら，条件(3)が成り立つ．また条件(4)の下では，条件(3)は Z と Y の注目度が等しいことと一致する．

リスク選好の変化の予測

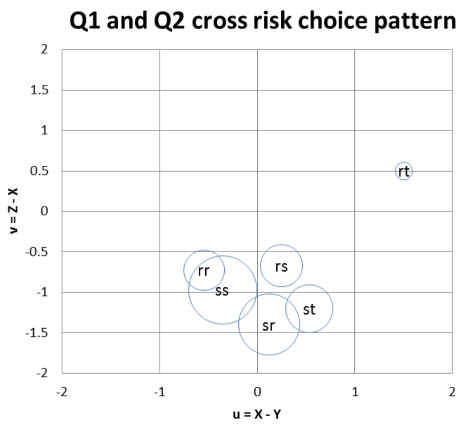

図 2　Q1 と Q2 との選択ペアごとの平均値.

双対ギャップの解釈

$$w = y^T b - x^T c$$

は，(3)式の下では $w = -u - v$ である．$w > 0$ のとき，双対ギャップが存在する．理論上は $w \geqq 0$ であり，最適解で 0 になる（弱双対定理）．しかし，実証データでは，図 1 のように比較的少数だが，ρ(Y) $-\rho$(Z) の値が正になることがある[1]．

ところで，Q1 の注目の枠組みだけから，Q1 と Q2 の選択の組合せにおいて生じるリスク選好の変化をある程度識別できる（図 2 参照）．図 2[2]ではリスク選好が変化しなかった ss と rr の 2 群の平均値は（P）と（D）の実行可能領域の共通部分にあることに注意しよう．また rt を除くと，リスク選好が変化した rs, sr, st の群中心は $v \leqq 0$ かつ $u > 0$ の領域にある（双対問題(D)は実行可能だが主問題(P)は実行不可能である）．

Q1 で B かつ Q2 で C のような選択パタン（共通比効果）が生じる認知的な要因を解釈すると，以下のようになる．主問題（P）では資源の割当上限 b を超えるモニタリング活動を Z の後悔に対して行いながら，双対問題(D)では b を資源価格として Y の安堵への注目を抑えようとする．この相互作用は双対ギャップにより調整される．

推測 1． *認知的資源配分問題として推理された意思決定者の認知システムの特徴は，基本的に楽観性を追求する姿勢を有することがわかる．すなわち，あるセル X に注目したとき，「後悔（Z）については，できるだけ考えたくない」が，「安堵（Y）についてはできるだけ意識していたい.」一方，セル X から見た相対的な Z や Y の価値を均等化して，認知活動に一定の限度を置くことによって，楽観性に歯止めがかけられている.*

[1] Z が後悔で Y が安堵の場合で，注目ランク差 $w = \rho$(Z) $-\rho$(Y) の最大値が正となる回答があるルールは，Q1 に 1 件，Q2 に 2 件，Q3 に 4 件，Q4 に 3 件，計 10 件ある．全部で 68 個ある XYZ ルールの，それ以外の場合も，w の最大値 0 以下となるルール数の方が多い．

[2] 図 2 は図 1 と同じ XYZ ルールの(u, v)-座標であり，v 値については Q1 でリスクをとる群 r・がやや高く，u 値については Q1 が r であるか s であるかによって，群・r と群・s の間での大小関係が逆転している．このため，Q1 を一括して Q2 を集計すると交絡が生じ，選択と注目の間の関連が消える．

5. 論理プログラミングへの翻訳

認知活動を情報処理として捉える計算論的アプローチと本節のモデルは必ずしも相容れないものではない．本節では本モデルに対応した論理プログラミングを与える．ホーン節集合における推論（導出原理）は，線形計画問題としての表現（LP 緩和問題）として形式化される．

命題論理のホーン節は，頭（結論部）に肯定リテラル，本体（条件部）にリテラルの連言をもつ論理式である．

$$b \leftarrow a_1 \,\&\, a_2 \,\&\cdots\&\, a_n.$$

ここで，$b, a_1, a_2, \cdots, a_n$ は 0 または 1 の値（真理値）をとるブーリアン変数，←は条件命題（only if），&は連言，¬は否定の記号である．またこれは唯一の肯定リテラルをもつ選言と等価である．

$$b \vee \neg a_1 \vee \neg a_2 \vee \cdots \vee \neg a_n.$$

上記の変数を区間[0, 1]に連続化して得られる線形緩和問題は，次の不等式で表される．

$$b + (1-a_1) + (1-a_2) + \cdots + (1-a_n) \geq 1.$$

すなわち，

$$b + n \geq 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i. \quad \cdots (5)$$

式(5)は主問題(P) の不等式制約条件に対応する．(5)式の左辺は，ある一つのセル C の注目ランクの値を自然に定める．このことを示すため，次のような手続きを考えよう．4 人の監視者が各自 1 回の監視機会を使うかどうか独立に決める．監視者 i が監視するとき $a_i = 1$, 監視しないとき $a_i = 0$ とする．$n = 4$ であり，全員が監視するとき $b \geqq 1$，誰も監視しないとき $b \geqq -3$ となる．

こうして，注目の枠組みを決定する手続きをホーン節の論理プログラム（情報処理モデル）として書くことができ，またそれは LP 表現をもつことが分かった．XYZ ルールは注目の枠組みの LP 表現にさらに制約条件を追加したものであるから，次の推測が可能である．

推測 2． *XYZ ルールに従う注目の枠組みは，4 人の監視者の論理プログラムの動作を制限したものによってシミュレートできる.*

これとは別に，XYZ ルールをホーン節に直接的

に対応させることもできる．XYZ ルールはランクの大小関係ペアの間の推論である．

$$\rho(X)-\rho(Y)>0 \Rightarrow \rho(Z)-\rho(X)\leq 0,$$
$$\rho(Z)-\rho(X)>0 \Rightarrow \rho(X)-\rho(Y)\leq 0.$$

上の各行は,「もし⇒の右側の不等式が違反すれば，それに対応する資源（節，不等式）は使えないが，代わりに左側の不等式の否定に相当する資源を使用できる．」こととして読める．これは前節で見た注目の枠組みの双対定理と一致する．

ちなみに，論理式を連続緩和した LP モデルにおける推論（導出）の 1 ステップは，LP のピボティング（基底掃出し演算）1 回分に相当する．Jeroslow & Wang (1990) の定理によると，各ルールが導出に用いられる回数は，(5)のスラック変数に乗じる双対価格（式(1)の y）によってカウントされる. 一方, 注目の枠組みを定める問題では，後悔や安堵の意識を生じさせるために使う資源として，XYZ ルールの両辺のペア比較が注目のたびにアクセスされると解釈される．

こうして，意思決定者の意識は，LP の最適化もしくは論理プログラムの推論を，おそらく，意識せずに，行っている可能性が推理された．次節では，認知的資源配分を実現するより具体的なメカニズムを，ゲーム論モデルを用いて推理する．

6. ゲーム論的メカニズム

前節で述べた監視モデルを一般化すると，注目の枠組みを定めるゲーム論的モデルが得られる．また変分不等式(Facchinei & Pang, 2003) や線形相補性問題(Cottle et al., 2009)を用いることによって，LP モデルで説明しにくかった負の双対ギャップや差拡大的な傾向を説明することができるようになる．

LP モデルでは準最適な注目配分が生じる原因――例えば限界合理的な意思決定をモデル化するヒューリスティックス――を別に考える必要が生じる．また，Q1 の XYZ ルール（第 3 節の図 1）では， $u=0$ のときだけ v 軸上の負の方向に件数が増える．線形モデルはこのような傾向を説明しにくいが，QP やゲームモデルはこうした現象の説明に向いていると考えられる．

エージェントによる監視

前節で述べたように，注目の枠組みの決定は，複数の観測地点に限られた観測回数を配分する問題にたとえられる．つまり，注目ランク上位のセルは下位のセルよりモニタリングの回数が多いと考える．そのモデル化の一つの例として，意思決定者をエージェントの集合に分解し，各エージェントを各セルに割り当てた非協力ゲーム（以下たんにゲームと書く）を考えることができる．エージェントの戦略集合はそのセルの注目ランク値である．

各エージェントは他のエージェントの設定したランク値に応じて自分が担当するセルが気になるものとする(エージェントの費用関数). このとき，回答者が各セルについて報告した値を積極的に変える意思がないと仮定すると，このゲームのナッシュ均衡（最適反応）において，1 人の意思決定者としての，注目の枠組みが定まると考えることができる．

エージェントの費用関数

本論文では，注目の枠組みは認知的資源配分問題の解として，意思決定者の知能（脳）が求めた答えだと考える．その解は何らかの最適性の条件を満たす (または近似的に満たす)．自明なモデル化は，実際の報告値 ρ と任意の報告値 μ に対し，各エージェント i の費用関数を $f_i = (\mu-\rho)^2$ とおくことであるが，現実の情報処理について洞察が得られるというものではない．

一方，もし注目の費用がゼロなら，なぜすべて $\rho=1$ としないのかと聞かれたら答えに窮する．実際，Q1 から Q4 まですべて注目ランク $\rho=1$ とした回答は，96 件中 1 件しかない．もちろん，ここで想定される費用の概念は，意思決定者自身が支払いを意識する金額ではない．図 3 に例示するように，それは相補性の説明や注目の枠組みの予測のために便利な虚構（As-If モデル）として役に立つ．例えば， $f=(1-u)\cdot v$ とおくと，$\partial f/\partial v|_{u=0,v>0}<0$ となり，Z と Y の間の注目差拡大の部分について説明できる（図 3 上参照）．

$f = (u - a)(v - b)$, a = 1, b = 0

v↑ \ →u	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
4	20	16	12	8	4	0	−4	−8	−12
3	15	12	9	6	3	0	−3	−6	−9
2	10	8	6	4	2	0	−2	−4	−6
1	5	4	3	2	1	0	−1	−2	−3
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
−1	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3
−2	−10	−8	−6	−4	−2	0	2	4	6
−3	−15	−12	−9	−6	−3	0	3	6	9
−4	−20	−16	−12	−8	−4	0	4	8	12
→u	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4

$f = u^2 + v^2 - a\,uv + b\,u + c\,v$
$a = 1, b = 0, c = -1$

v↑ \ →u	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
4	12	9	8	9	12	17	24	33	44
3	10	6	4	4	6	10	16	24	34
2	10	5	2	1	2	5	10	17	26
1	12	6	2	0	0	2	6	12	20
0	16	9	4	1	0	1	4	9	16
−1	22	14	8	4	2	2	4	8	14
−2	30	21	14	9	6	5	6	9	14
−3	40	30	22	16	12	10	10	12	16
−4	52	41	32	25	20	17	16	17	20
→u	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4

$f = u^2 + v^2 - a\,uv + b\,u + c\,v$
$a = 2, b = c = -1$

v↑ \ →u	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
4	0	0	2	6	12	20	30	42	56
3	2	0	0	2	6	12	20	30	42
2	6	2	0	0	2	6	12	20	30
1	12	6	2	0	0	2	6	12	20
0	20	12	6	2	0	0	2	6	12
−1	30	20	12	6	2	0	0	2	6
−2	42	30	20	12	6	2	0	0	2
−3	56	42	30	20	12	6	2	0	0
−4	72	56	42	30	20	12	6	2	0
→u	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4

図３　Q1 の XYZ ルールを説明する２次費用関数．３つの図はそれぞれ図１において，上）$u, v \leqq 0$ の範囲にあるデータ，中）原点付近に集まるデータ，および，下）双対ギャップが消える（必ずしも実行可能でない）データに対応する．これらの関数は QP の目的関数とみなせる．

ナッシュ均衡

可能なランク値の集合 $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$，費用関数 f_i を注目の枠組み $\boldsymbol{\rho} = (\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n) \in M^n$ の関数として以下の不等式を考える．

$$(\mu_i - \rho_i)\ f_i(\rho_i, \rho_{-i}) \geqq 0 \quad \forall \mu_i \in M. \quad \cdots (6)$$

ただし ρ_{-i} はベクトル ρ の第 i 要素を除いた残りである．式(6)をすべてのセル（エージェント）i について並べた条件を考えると，それらを同時に満たす $\boldsymbol{\rho} \in M^n$ はナッシュ均衡である．またこの数式は変分不等式とも呼ばれるが，実は式(1)や(2)の相補性条件の別表現になっている．

メカニズム設計・ゲーム形式

Hurwicz & Reiter (2006)によると，メカニズムの設計とは，エージェントの費用関数によらず，ゲームの結果（ナッシュ均衡）が所定の資源配分を達成できるようにゲーム形式を工夫することである．またゲーム形式とは，ゲームからエージェントの費用関数（または利得関数）を除いたもの，つまり戦略組から配分結果への写像を言う．

XYZ ルールの集合は，選択問題ごとに異なるが，個々の回答者のリスク選好や行動選択によらない．すなわち，XYZ ルールは X，Y，Z の３エージェントについてのゲーム形式であり，相互に許容しうる戦略として，他の２人のランク値に対して自身のランク値の許容される範囲を規定する．このため，各エージェントの費用関数によらず，ゲームの結果を左右する．XYZ ルールから解釈されたゲーム論モデルは，理論上，現実の注目の枠組みを達成するメカニズムになっていると推測される．

線形相補性問題

相補性条件の特殊な例として，（凸）二次計画法

$$\text{(QP)} \quad b^T y + \frac{1}{2} y^T Q y \to \min.$$

$$s.t.\ A^T y - c \geq 0, y \geq 0$$

の最適解の必要条件（KKT 条件）は，(1)と(2)を微修正した形の条件になる．

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} b+Qy-Ax \\ A^T y-c \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ x,y\geq 0, \\ \begin{pmatrix} y^T(b+Qy-Ax) \\ x^T(A^T y-c) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{cases} \cdots(7)$$

第3節の変数 u と v を代入すると，(7)の後半部分は

$$\begin{pmatrix} y^T\alpha \\ x^T\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u+y^TQy \\ -v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdots(8)$$

と書ける．最適性の目安は $w = y^TQy$ となる．

(7)は以下のように書き直すことができる．

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ -c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Q & -A \\ A^T & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

上の条件を満たす $x \in R^n$, $y \in R^m$ を見つける問題は線形相補性問題（LCP）と呼ばれる．Q = O の場合は LP の相補スラックネス条件である．LCP は F がアフィン関数 $F(z) = q + Mz$ の場合の相補性問題である．

行列 A と B で利得表が与えられる2人ゲームのナッシュ均衡(p, q)は以下のように定義される．

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} e-Ap \\ f-B^Tq \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} g^Tp \\ h^Tq \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots(8) \\ g,h,p,q \geq 0. \end{cases}$$

(8)を LCP の形で書くと以下のようになる．

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O & -A \\ -B^T & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

XYZ ルールは，X を調停者とする Z（後悔）と Y（安堵）の間のゲームとして解釈できる．なお LP の双対性はゼロ和ゲーム（$B = -A$）の場合に相当する（ナッシュ均衡は鞍点と一致する）．日ゼロの場合，X から Z を見た評価（利得表 A）と X から Y を見た評価（利得表$-B$）が必ずしも一致しない．LP では準最適な ρ は，非合理的なプレイの結果だが，ρ がゲームの均衡なら LCP の解でもある（変分不等式(6)を解く）．

7. 確率加重

アレの背理や曖昧な確率の下での賭けの例題（エルズバーグの背理）といった例題は，経済学者たちを困惑させたが，心理学者は確率加重を用いて説明することができた．本節では離散凸解析（室田，2001）を参考に，確率加重関数を資源配分問題として再記述し，XYZ ルールと比較する．

さまざまな確率加重の関数形が提案されたが，Tversky & Kahneman(1992)が提案する関数形は以下のようである[3]．

$$w(p) = \frac{p^\alpha}{\sqrt[\alpha]{p^\alpha + (1-p)^\alpha}}. \quad \cdots(9)$$

ここで α は確率の歪みのパラメータである（$1 \geqq \alpha > 0$）．$\alpha = 1$ のとき $w(p) = p$ であり，α の値が小さいほど歪みが強まる．そのグラフは確率 0 や確率 1 の付近で導関数が急激に大きくなるため，逆 S 字型の特徴を持って描かれる．α の実証的な値は，上記論文では利得の場合が 0.61，損失の場合が 0.69 に設定されている．実は，Q1 と Q2 の間の選択ペア BC や BT のような共通比効果は，確率のわずかな歪みを仮定するだけで説明される．一方，Q3 と Q4 の間で起きる共通結果効果（選択ペア FG や FT）については，α が 0.3 程度の強い歪みが必要となる．しかし確率加重関数の質的変化を体系的に説明する理論は知られていない．

確率加重関数は，入れ子の制約（スキーマ N）の下での資源配分問題として記述できる．あるギャンブルの賞金 x を金額の低い方から順に並べて，それぞれに注目する活動 $k = 1, 2, \cdots, m$ を考える．注目の活動は有限個 n の資源（例えば 100 個の石）を配分した回数分行う．ただし，金額の集合の族 $\Gamma = \{X_1, X_2, \cdots, X_m\}$ と非負整数 $b_1, b_2, \cdots, b_m$ の下で，

$$r(X_1) \leq b_1, r(X_2) \leq b_2, \cdots, r(X_m) \leq b_m \quad \cdots(10)$$

という制約に従うものとする．ここで $r(\cdot)$ は各集合内の資源数の合計とする．

---

[3] 累積プロスペクト理論の確率加重関数は，賞金額の符号別に用意され，別に定義された価値関数と合わせてギャンブルの評価に用いられる．ショケ積分（あるいはロバーツ拡張）を用い，結果のランクの順に割り当てられた事象の系列に対する容量の差分を加重として，価値関数の限界貢献を累積的に計算する．この手法はランク依存期待効用理論，ショケ期待効用理論，信念関数の研究でも用いられる．

（配分スキーマ N） $\phi \neq X_1 \subseteq X_2 \subseteq \cdots \subseteq X_m$，$X_0 = \phi, w(X_0) = 0$ とする．賞金ランク k に配分する石の個数の上限を(9)の確率加重に比例させる．

$b_k = \lfloor n \cdot w(X_k) \rfloor$.

一方，XYZ ルールは賞金額の交差的注目（セルのペア）に対して活動を配分する．

（配分スキーマ T） $\Gamma = \{X_1, X_2, \cdots, X_m\}$ を層族：$\alpha, \beta \in \Gamma \Rightarrow (\alpha \cap \beta = \phi) \vee (\alpha \subseteq \beta) \vee (\beta \subseteq \alpha)$ とする．$u, v \leqq 0$ のとき，(Z, X) と (X, Y) を別の層に，$u > 0$ のとき (X, Y) を (X, Z) の層に，また $v > 0$ のとき (Z, X) を (Y, X) の層に含めるようにすると，スキーマ T は XYZ ルールに一致する．

最後に，推測として述べるにとどまるが，離散的な資源配分モデル(Danilov, et al., 2001)を用いると，XYZ ルールを粗代替性（ないし M$^{\natural}$凹性）として解釈し，注目の枠組みが実現されるメカニズムを競争均衡として考察できるかもしれない．

8. 結論

本論文では，ギャンブル選択問題の一種であるアレの背理における交差的注目を認知的資源配分問題として論じた．また実証データから抽出された相補性（XYZ ルール）を連続緩和の下で線形計画法およびそれに等価な論理プログラムとして解釈し，注目の枠組みの最適性を考察した．またゲーム理論，二次計画法，離散的資源配分といった，より一般的なモデルの適用を試みた．

謝辞

拙研究に対し研究の時間と資金と環境を与えた関東学園大学に謝意を表す．また実験に協力した学生諸君に感謝する．残されたすべての誤りは勿論筆者の責に帰すものである．

参考文献

[1] Allais, Maurice (1953) “Le comportement de l'homme rationnel devant le risque: critique des postulats et axiomes de l'école américaine”, Econometrica, Vol.21, No.4, pp. 503-546.

[2] Bell, David E. (1982) “Regret in decision making under uncertainty”, Operations Research, Vol.30, No.5, pp.961-981.

[3] Cottle, Richard W., Jong-Shi Pang, and Richard E. Stone (2009) “The Linear Complementarity Problem”. Vol. 60, Siam.

[4] Danilov, Vladimir, Gleb A. Koshevoy, and Kazuo Murota (2001) “Discrete convexity and equilibria in economies with indivisible goods and money”, Mathematical Social Sciences, Vol.41, pp.251-273.

[5] Facchinei, Francisco and Jong-Shi Pang (2003) “Finite - Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems”, Volume I, Springer-Verlag.

[6] Hurwicz, Leonid and Stanley Reiter (2006) “Designing Economic Mechanisms”, Cambridge University Press.

[7] 犬童健良，(2013) “アレの背理における注目と注目の流れ”，行動経済学会誌，Vol.6, pp. 70-73. http://dx.doi.org/10.11167/jbef.6.70

[8] 犬童健良，(2014) “アレの背理における反事実的注目とリスク選好の認識的安定性”，関東学園大学経済学紀要，Vol. 39, pp. 53-80. http://ci.nii.ac.jp/naid/110009738442

[9] Jeroslow, Robert G. and Jinchang Wang. (1990) “Solving propositional satisfiability problems”, Annals of Mathematics and Artificial Intelligence, Vol.1, pp.167-187.

[10] Loomes, Graham and Robert Sugden (1982) “Regret theory: An alternative theory of rational choice under uncertainty”, The Economic Journal, Vol.92, No.368, pp.805-824.

[11] 室田一雄 (2001) “離散凸解析”，共立出版.

[12] Tversky, Amos and Daniel Kahneman (1992) “Advances in prospect theory: Cumulative representation of uncertainty”, Journal of Risk and Uncertainty, Vol.5, No.4, pp.297-323.