長期的に保持される理解作りを目指した学習場面の観察方法の検討 ー複素数平面の問題解決を例にー

大村 勝久†，遠山 紗矢香‡
Katsuhisa Ohmura, Sayaka Tohyama
†静岡県立浜松北高等学校，‡静岡大学
Hamamatsu-kita Prefectural High School, Shizuoka University
†katsuhisa01.omura@edu.pref.shizuoka.jp

概要
新しい大学入試で出題されるのは「活用」が求められる問題だと考えられている． 学習者の知識の活用を促すには，学習者が深い理解に至ることが重要だと考えられている．そこで本研究では複素数平面の証明問題を解決することを通じて複素数平面の理解を促すことを目指した協調学習型の授業を構築し，授業後の生徒の解答と授業中の生徒の発話から理解過程を分析した．その結果，生徒は「長さ」や「回転」等の日常生活になじみ深いことばと複素数平面の概念とを徐々に結びつけながら問題解決を進めていたことが示された．

キーワード：大学入試, 協調学習, 複素数平面, 理解レベル, 発話分析

1. 背景

新しい大学入試で出題されるのは「活用」が求められる問題だと考えられている. この問題は, 暗記していることがらを表出するのでは解決できない，概念的な理解[1]を要する問題だと推測される．概念的な理解が求められる問題とは，覚えていることをそのまま書き出すタイプの問題ではなく，その場で問題が何を求めているのかを読みとり，必要に応じて持っている知識を組み合わせて考えーportable, dependable で sustainable（PDS）な知識ーを創り出しながら解くことが求められる問題[2]だと考えられる．

学び手主体の観点から考えた場合,「腑に落ちる」わかり方へ至るには，身体性と抽象的な概念とを結びつけていく学びの過程が有効と言われている[2]．またその過程では, 幅広い対象内容・学習者の年齢について総じて対話が有効であることも示されてきた[3].

一方で近年では，入試問題相当の難易度の問題を解く過程で，生徒がいわゆる「テストワイズネス」[4]を駆使して表面的な特徴に注目した問題解決を遂行している可能性が示唆されている[5]．益川ら[5]は，高等学校の国語の問題を解決する際に，テキストに含まれる単語やその単語間の関係性などを手掛かりとしていわば表面的な特徴でテキストを読む「テキストベース」の理解と，テキストの情報からそこでの状況についてモデル的な考えを構築する「状況モデル」の理解の二種類[6]で分析をした結果，生徒はテストワイズネスを駆使してテキストベースの理解を作りそれに依拠して問題を解いている可能性が高いことを示した.

国語と並んで，小学校・中学校では全国学力・学習状況調査の対象科目として知られている数学でも同様の傾向が観察される可能性がある. 実際にデイビス [7]は, “Rote mathematics vs. meaningful mathematics” （暗記数学と意味を持つ数学. 和訳は訳者である佐伯による）ということばで二者のちがいを指摘している. また, 数学の数的操作と概念とを結びつけながら学んだ児童はそうでない児童と比べて一人でも問題解決ができるようになった確率が高かったことも示されている[8]. 遠山・白水は, パターンを予め暗記しておき, 公式に数値を当てはめてとく解き方では誤答者が目立ったのに対し，目の前の問題を自分の身体や身の回りの形・大きさといったものと数式の意味とを関連付けながら解いた児童は，話し合いながら正答にたどりつく場合が多かったことを示した[8]．後者はまさに「意味を持つ数学」としてのわかり方の例だと考えられる．

上記の例と，レイコフ・ヌーニュス[9]による「数学が高度に抽象的な考え方を要するものだとしても，数学は人の心が生み出したものであり，現実世界で実在することがらに依拠した社会的構成物である」という見解から考えれば，抽象度の高いと考えられる高校数学でも，現実世界と対応付けながら意味をもつ数学としてのわかり方が可能であると予想できる．中でも本研究では，入試レベルの数学で扱われる内容の中でも，以下で述べるように抽象度が高いと考えられる複素数平面の理解に焦点を当てる.

証明問題の場合，概念的な理解が伴っているかを外部から観察しやすい．また，複素数平面は，概念的な理解に基づいているかパターンをあてはめているだけかが解答から解読しやすい．例えば平面上の点間の距離や角度，回転などを考慮して立式しているかが答案に表れやすいだろう.

2. 目的

本研究の目的は, 高等学校数学科において, 意味を持つ数学の学習を促すための授業を実施し，そこでの学習成果を portable, dependable で sustainable（PDS）の観点から評価する方法を検討することである．学習内容として，意味を持つ数学として学習できたか否かの成果が表れやすいと期待される複素数平面に焦点化する．評価の指標として，Pellegrino ら[10]や Linn & Hsi [11] の指摘を踏まえて，長期的に保持されると期待される「意味を持つ数学」の観点から学習到達度を評価する方法を検討する．

3. 研究方法

大村・遠山・松澤[13]で実践した 2 つのクラスのうち，より詳細な記録が残っている A クラスに焦点化した．静岡県浜松市の県立高等学校普通科に在籍する 2 年次 A クラスに在籍する理系コースの生徒 40 名のうち，当該日に出席した 37 名に対する数学科の授業で，複素数平面について扱った 1 コマ完結型での協調学習形式の授業，及び授業から約 1 ヶ月経過後、および 3 ヶ月経過後の遅延テストとインタビュー結果を本研究の対象とした．この高等学校の生徒は, 例年全員が四年制大学への進学を希望する．対象生徒は校内において標準的な進度で学んでいるクラスの生徒であった．A クラス対象の週 6 コマの数学科の授業のうち第一著者は数学Ｂおよび数学Ⅲの複素数平面いろいろな曲線を中心に週 3 コマ（1 コマ 50 分）を担当した．残り 3 コマは他の教員が担当した．

対象生徒とその保護者には，文書を通じて本研究に対する同意を得たうえで，生徒が書き込んだプリント類を回収して匿名化し電子的に保存した．また, 授業中の様子をビデオカメラ及び IC レコーダで記録した．

対象授業は数学科教員である第一著者が第二著者と協議しながら設計した．授業は 2017 年 12 月 15 日に 1 コマ 50 分の授業として行われた．授業の運営は第一著者のみで運営した．PDS の知識を育むため，授業の活動形態は知識構成型ジグソー法[3]による協調学習形式とした．知識構成型ジグソー法は参加者 1 人ひとりの理解深化を目指す形態であるため，一連の協調学習の事前及び事後において，生徒は問いに対する解を一人で考えて記述した．

本授業は，複素数平面の学習を行う単元の総括として位置付けられた．学習課題は「複素数のよさはどのようなものか？」とし, 学習問題として複素数平面の図形の証明問題を設定した（図 1）．この問題は，複素数平面を利用することで図形の証明問題に解答できることに気付かせ，かつ生徒全員が完全に解答できるようにすることを目ざして, 第一著者が問題集[14]の中から選択した．なお, 以下で述べるエキスパート資料の割り当てについては授業者が決定した．

授業は知識構成型ジグソー法[3]に基づいた協調学習形式で実施した．知識構成型ジグソー法では, 解決したい問いに対して，解決方法を考えるための材料となる資料を複数用意して生徒に分担させ（エキスパート活動），異なる資料を担当した生徒同士が話し合いながら問題を解く（ジグソー活動）．その後，クラス内で各グループが求めた解決方法を共有する（クロストーク）．これら一連の協調学習の事前及び事後において，生徒には問いに対する解を一人で考えて記述するよう求める．ただし, 本研究の対象授業では時間の制約によりクロストークの実施を見送った．

授業設計の意図は，複素数平面上における回転や距離・分点といった複素数の性質について, 垂直条件や, ベクトルとの類似点あるいは相違点といったポイントに留意しながら，生徒自身が既習事項を組み合わせることによって，未知の問題を解決する経験をさせることだった．幾何の証明問題を複素数平面の考えを用いて解くことは，生徒にとって初めての学習である．

問題解決の支援として, 知識構成型ジグソー法の「エキスパート活動」では資料 A で垂直条件，資料 B で回転，資料 C で距離・分点の 3 種類の資料を配布し，これら 3 つの視点を活用して問題を解くよう促した．なお，資料 A の垂直条件では，2 本の半直線が垂直に交わる場合に「純虚数」となる理由について，2 本の半直線とそれらのなす角を極形式（$r(\cos\theta + i\sin\theta)$）で表現したとき, 2 本の半直線が垂直に交わる状態，つまり θ が $\pi/2$ または $3\pi/2$ となるときには実部がゼロになり虚部のみが残ることを説明していた．

第一著者は日ごろの授業で，生徒が主体的に学習を進められるよう，対話的な学びのみならず様々な教育的取り組みを行っている．この中で知識構成型ジグソー法による授業は, 1 年間のうち各クラスに対して 4〜5 回行っている. 知識構成型ジグソー法で授業を行う単元は，特に概念的な理解を生徒に促したいものを選択している. 問題は, 生徒がひとりで解くのは容易ではないが複数であれば解ける可能性がある程度の難しさの問題を抽出している. 中でも今回は, 国立大学二次試験

問題のように生徒が学んだことを組み合わせて問題を解く経験ができるよう意図したため，問題集から一定の難易度の問題を抽出した.

△OAB があり、その外側に、正方形 ODEA および正方形 OBFG を作る。また、複素数平面上で A（α），B（β），とする。線分 GD の中点を M とするとき、AB=2OM，AB⊥OM であることを証明せよ。

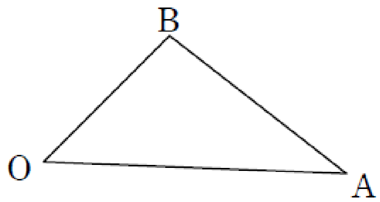

図 1　生徒に提示された問題

4.　分析方法

先行研究[8]の手続きに倣って，以下の項目について分析を行った.

- クラス全体を対象とした問題に対する正答者数の分析（事前・事後・遅延 1・遅延 2 の各 4 回）
- 各時点での解答に含まれた構成要素の内訳
- 1 グループを対象とした詳細分析（解答の正誤，発話分析）

5.　結果

5.1. 正答者数の分析

クラス全体の生徒 37 名を対象として，事前・事後・遅延 1・遅延 2 の各タイミングにおける正答者数の分析を行った．結果を表 1 に示す．なお正答者として数え上げた者には，後述する 7.3 節でほぼ正答（△）と分類される者も含めた.

事後のタイミングでは生徒の 8 割程度が解けていた. 各生徒が担当したエキスパート資料間で，正答者数の有意な違いは見られなかった．一方で，遅延 1 では正答者は半数程度まで落ち込んだ．中でもエキスパート資料 A の担当者の正答者数が下落した． 3 月の遅延ではいずれの資料担当者も正答者が増加した．遅延 1 と遅延 3 の間に複素数平面の問題を含む定期テストがあったため，生徒は定期テストの機会に学んだことを遅延 3 で活かすことができた可能性が指摘される．ジグソーを発見学習，定期テストを学習素材と捉えれば，Schwartz & Martin[15]の PFL (Prepare for Future Learning) パラダイムと類似しているため，遅延 2 の時点では未来のための学習が起こっていた可能性が指摘できる.

5.2. 解答の詳細分析

生徒の解答について，第一著者と第二著者が相談のうえ，各エキスパート資料の中で問題を解くために不可欠な考え方と思われるものを抽出した. その結果, エキスパート資料 A では 2 つ, B では 1 つ, C では 4 つ, 合計で 7 つの考え方が含まれていると考えられた．これら 7 つを，事後・遅延 1・遅延 2 の 3 つのタイミングそれぞれにおいて何名の生徒が解答で言及していたかを分析した結果を表 2 に示す.

Schwartz & Martin [15]の PFL パラダイムに照らして結果を見ると，定期テスト前の結果，つまり遅延 1 の結果は学習支援が一切ない純粋な遅延テストとなるため，まず遅延 1 の結果に注目した．遅延 1 の結果を見ると，資料 A 担当者の A-2 の「m/(β-α)は純虚数」と C-1 の「原点からの距離」の言及者数が 2 名であり，他の構成要素と比較して言及者数が少ないことが見出された．ただし「原点からの距離」は，生徒がたとえ了解していたとしても答案に明記しない場合があるため，考慮から外すことが妥当だと考えられた.

A-2 の「m/(β-α)は純虚数」は，なぜ割り算なのか，純虚数とはどのような概念を示すものなのか，なぜ割り算という操作と純虚数という概念が対応づくのか，といった複合的かつ概念のブレンドが求められる考え方である．この複合的な考え方が生徒にとって困難だった可能性が示されたと捉えられる．前節の結果も踏まえると資料 A 担当者にとって内容の解釈が比較的困難だった可能性が指摘された.

表 2　解答の構成要素の内訳

	A-1 純虚数は垂直を表す	A-2 m/(β-α)は純虚数	B-1 αとβの極形式を示す	C-1 原点からの距離	C-2 原点から虚軸上の点までの距離	C-3 2点間の距離	C-4 中点の求め方
事前	0	0	0	2	0	3	5
事後	31	30	31	29	32	32	33
遅延 1	21	14	30	14	22	21	27
遅延 2	21	20	32	19	26	25	30

5.3. 1グループを対象とした発話分析

7.1 節と 7.2 節で示された可能性について詳しく分析するために，遠山・白水[8]の分析方法を用いて，大村ら[13]で実施したキーワードをベースとした発話分析を発展させて， 1 グループの対話について発話分析を実施した．1 グループは，遅延テスト 2 回目でクラス内の他グループと比較して遜色のない成績を収めており，かつ大村・遠山・松澤[13]で分析した自由記述にて他グループよりも複素数平面の考え方を用いて証明問題を解くことの利点を明確に説明していたグループであった．発話は一呼吸で説明したところまでを一行として書き起こした結果，434 行となった．発話分析では，三宅[2]の 3 レベルモデルにしたがって，図 1 の問題について以下の表 4 に示すように発話をレベル分けした．

表 4　問題（図 1）の 3 つのレベル

	複素数平面の証明問題（図 1）
レベル 3：数学的な知識や概念	・ πを用いた表現（極形式など） ・ i を用いた表現，純虚数 ・ 平面上の位置や二点間の距離の数式による表現
レベル 2：数値の結び付け，立式や計算	・ 公式にあてはめた計算や式の展開 ・ 図的イメージと数学的な知識をつないだ計算
レベル 1：問題が示す図への言及，身体や道具の利用	・ 図中の位置や二点間の距離の確認 ・ 図形の回転イメージの描画

発話分析ではまず，遠山・白水[8]の分析に倣って，対話中に 3 レベル間を推移しているかを分析した．その結果，対象グループの対話は 3 レベル間を推移しながら解に到達していたことが示されたため，理解を深めていく対話が生じていたことが推測されたる

続いて，A-2「m/(β-α)は純虚数である」ということについて言及している対話を抽出した．これは対話の最後の部分，377 行目以降で示された．表 5 に示すように，純虚数という概念を使って証明問題を解く部分では，授業者がエキスパート資料を再確認するよう促した直後に資料 C の担当者が唐突に気付いた様子が観察された．資料 A の担当者及び B の担当者は，資料 C 担当者の気付きに対して納得したとは捉えられない反応を返していた．

表 5　m/(β-α)は純虚数であることの対話

話者	発話	Lv.
C	あっ，できてるできてる，まったまった！気づかなかったー．等式として考えればさあ，…$m=i/2(\beta-\alpha)$…になって（解答には $m=i/2(\beta-\alpha)$, $m/(\beta-\alpha)=i/2$ と書かれている）	2
B	できてるってこと？	-
A	そういうこと？	-
C	これ（$m/(\beta-\alpha)$）が純虚数（エキスパート資料を指さす）でしょ	3

上記発話に関して，対話における特徴としてレベル 1 に関する発話がレベル 3 に連なって登場する箇所を重点的に分析した．これは，遠山・白水[8]では，1 人では問題を解くことができなかった者同士が，当初は別々に扱っていたレベル 1 とレベル 3 の発話を対話の中で結び付けられていく過程が示されたためである，分析の結果，以下の 3 つの対話が抽出された．

【1】回転を意味する発言（表 6）

発話の 130 行目に，三角関数を用いた表現（レベル 3）と，線分を「ぐるっと」回転させる考え方（レベル 1）とを対応付けた発話が見られた．なお，表中の太字はレベル 1 を示唆すると考えられる発言である．

表 6　回転（レベル 1）と式（レベル 3）の対話

話者	発話	Lv.
C	δが，OA×{cos(-π/2)…*i*sin…(-π/2)}	3
A	OA×って，α×じゃない？	3
A	あっそうだαだ，O が原点だもんね	3
B	マイナス？	3
A	(-π/2)	3
B	始線か…	-
C	始線か．そう考えて，マイナスで	3
A	**ぐるっと**	1
B	これ計算すればマイナスじゃない？	-
A	-α*i*？	2
B	そうそうそう，-α*i*	2

【2】*i* の意味と回転を対応付ける対話（表 7）

発話の 300 行目に，複素数平面の i（レベル 3）と回転（レベル 1）を対応付けようとする対話が観察された．主に担当者 C がレベル 1 の視点で説明をしようとしているところに，担当者 B がレベル 3 の視点から説明をしようと発言している様子がうかがえる．

表 7　回転（レベル 1）と *i*（レベル 3）の対話

話者	発話	Lv.
C	これ純虚数じゃなくてさ, sin の回転の話で *i* を作っちゃえばさ	3
C	これ(プリントを指さす)の 1/2（の長さ）を，**こうやって（左に指を動かす）移動した**ってことにしちゃえばいいんだよ	1
A	言ってる意味がわかんない	-
B	なにを？	-
C	だから（式から）*i* を抜いた部分は 1/2 の長さで，それを回転させるから，*i* がかかわってるから，それをとっちゃえば	3
B	i 回転させてってこと？	3
C	そうすれば **90 度**とか示すことができる	1
B	えっ？1/2(β-α)っていう複素数を *i* 回転させる？	3
C	*i* 回転だから cos…	3
B	cos*i*?	3
C	cos(π/2)	3

【3】*i* の意味と長さを対応付ける対話（表 8）

発話の 431 行目に，*i* の絶対値は 1 になることと，複素数平面の位置を示すαとβを引き算で表すことで二点間の距離を示すことができることに関する発話が見られた．ただし，*i* の絶対値を取ると 1 になることの理由は明確には説明されなかった．

表 8　i の意味（レベル 3）と長さ（レベル 1）の対話

話者	発話	Lv.
B	(|(β-α)*i*|の *i* の部分を指して）なんでこれって 1 になるの？	3
A	これは複素数の，*i*(β-α)が（絶対値としても *i* も含まれた）中で複素数だから，長さではないわけよ	3
B	これで，**長さ**	1
A	そう，長さってことは，*i* もついてるけど *i* の絶対値は 1 だから	3
B	OK ありがとう	-

以上の結果より，1 本の半直線を対象として，レベル 1 の回転や距離とそれらに対応するレベル 3 の考え方を関連付けていく対話が発現していたことが示された．一方で, 2 本の半直線が交わることに関するレベル 1 とレベル 3 を対応付ける発話，つまり資料 A の内容に深く関係する発話が観察されなかった．これは, 担当者 C の閃きによって対話が行われなかった可能性がある．閃いたことの内容をレベル 1 とレベル 3 の各方面から説明し，関連付けていくようなわかり方を引き出すことができれば，A-2 の「m/(β-α)は純虚数」について遅延テストでの言及が増加した可能性が指摘される．

5.4. まとめ

話し合いの内容と問題解決結果を照らし合わせると，担当者 A と担当者 C は協調学習の直後に完全解答をつくることができていた一方で，担当者 C は遅延 1，遅

延2で資料Aの垂直条件に言及しないまま解答を作成していた．表5の対話でも，資料Aをいかに用いるかについて苦労していたことが観察された．以上のことから，資料Aについては,「意味を持つ数学」として資料B, 資料Cと組み合わせるための工夫を加えることが有効だった可能性が示された．学習環境としての知識構成型ジグソー法の効果は広く知られているところであるが，そこで用いる資料や資料の組み合わせ方によって学習者の振る舞いが左右されることが本研究では追試されたと言える．また，本研究によって，複素数平面のように抽象度の高い内容であっても，レベル1とレベル3を対応付けながらレベル2のわかり方を創り上げることによって長期間にわたって保持される理解が形成される可能性についても示された.

今後の課題として，今回課題が見られた資料Aの内容を中心に知識構成型ジグソー法による授業を再デザインし, その効果を検証することが挙げられる. 本研究の対象生徒は卒業したため，新しい授業を同一の学習者に対して実施することは困難だが, 今後の同学校・同学年の生徒達に適用することで，授業改善の効果を検討したい.

謝辞

本研究はJSPS科研費（17K17786）の支援を受けた. 本研究の趣旨をご理解くださりご協力くださった校長先生，データ取得に協力くださった生徒および保護者のみなさんに感謝いたします.

文献

[1] Chi, M. T. H., Glaser, R. & Rees, E. (1982). Expertise in problem solving. in R. J. Sternberg (Ed) *Advances in the Psychology of Human Intelligence (Vol.1)*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

[2] 三宅芳雄・三宅なほみ (2014). 『教育心理学概論』. 放送大学教育振興会.

[3] 東京大学 CoREF (2017). 『「主体的・対話的で深い学び」を実現する知識構成型ジグソー法による数学授業』. 明治図書.

[4] Millman, J., Bishop, C. H., & Ebel, R. (1965). An analysis of test-wiseness. *Educational and Psychological Measurement*, *25*, 707-726.

[5] 益川弘如・白水始・根本紘志・一柳智紀・北澤武・河﨑美保 (2018). 思考発話法を用いた多肢選択問題の解決プロセスの解明ー大学入試センター試験問題の国語既出問題を活用してー. 『日本テスト学会誌』, 14(1), 51-70.

[6] Kintsch, W. (1994). Text comprehension, memory, and learning. *American Psychologist*, *49*(4), 294-303.

[7] デイビス. R. B (著) 佐伯胖 (監訳) (1987). 『数学理解の認知科学』. 厚徳社.

[8] 遠山紗矢香・白水始 (2017). 協調的問題解決能力をいかに評価するかー協調問題解決過程の対話データを用いた横断分析ー. 『認知科学』, 24(4), 494-517.

[9] レイコフ, G・ヌーニュス, R (著) 植野義明・重光由加 (訳) (2012). 『数学の認知科学』. 丸善出版.

[10] Pellegrino, J.W., Chudowsky, N., & Glaser. R. (2001). *Knowing what students know: the science and design of educational assessment*. Washington, DC: National Academies Press.

[11] Clark, D. B. & Linn, M. C. (2003). Designing for Knowledge Integration: The Impact of Instructional Time. *Journal of the Learning Sciences*, *12*(4), 451-493.

[12] 鈴木宏昭 (1996). 類似と思考. 新曜社.

[13] 大村勝久・遠山紗矢香・松澤芳昭 (2018). 大学入試に資する学びを目指した高等学校数学科の協調学習の実践と遅延評価方法の検討. 『日本認知科学会第35回大会発表論文集』, 1021-1025.

[14] 啓林館編集部 (2013).『Focus Gold 数学 3 (3rd edition)』. 啓林館, 206-207.

[15] Schwartz, D. L. & Martin, T. (2004). Inventing to Prepare for Future Learning: The Hidden Efficiency of Encouraging Original Student Production in Statistics Instruction. *Cognition and Instruction*, *22*(2), 129-184.