

# 対称性推論のモデルとしての「双条件付確率」と 小数サンプルからの因果帰納推論

## Biconditional Probability as a Model of Symmetry Inference and Causal Induction from Small Samples

高橋 達二<sup>†</sup>, 大用 庫智<sup>‡</sup>  
Tatsuji Takahashi, Kuratomo Oyo

<sup>†</sup> 東京電機大学理工学部, <sup>‡</sup> 東京電機大学先端科学技術研究科  
<sup>†</sup> School of Science and Engineering, Tokyo Denki University,

<sup>‡</sup> Graduate School of Advanced Science and Technology, Denki University  
tatsujitakahashi@mac.com

### Abstract

The study of symmetry in inference keeps attracting interests. This paper introduces a model of symmetric inference called pARIs, defined over  $2 \times 2$  co-occurrence frequencies. We show that the index works very efficiently in estimating the correlation of the population, especially when only few samples are given. The advantage of pARIs includes its simplest form, easy update, broad definability, and the clear theoretical underpinning as the probability of biconditionals (biconditional events), or the biconditional probability.

**Keywords** — Symmetry inference, Causal Induction, Small Data, Correlation Estimation

### 1. はじめに

人間の認知の様々な局面で見られる、普遍的な傾向としての対称性が、注目を集め続けている[8]。比較行動分析、発達心理学、推論心理学において発見された対称性だが、人間の目的論的思考との関連も議論され始め(服部, 私信)。力学系的なモデリングにはのりづらい、重要な問題を扱うきっかけを与え始めているのかもしれない。

対称性推論の実環境における有効性としては、篠原が提案した緩い対称性(LS)モデル[6]において、ごく単純な強化学習的環境での検証がある。そこでは、強化学習的な逐次的意志決定というタスクに由来する、効用や方策、記憶や計算容量といった多くの要因が関わって来、またLSモデルもさほど単純ではないため、

もし  $C$  ならば  $E$  ならば、そのとき逆の  $E$   
ならば  $C$  も信じる

といった傾向、対称性バイアスそれ自体の効果というものを考えるのは難しい。

そこで本論では、単なる共変情報からの因果関係の強さの推定、すなわち因果関係の帰納推論と

いう、より単純なタスクにおいて、対称性の効用を検証する。モデルとしては著者らの pARIs に主眼を置く。先行研究としては Hattori と Oaksford の論文[3]の設定を批判的に吟味し、彼らの DFH モデルとの比較を行う。こうして、従来よりもサンプルに実装された pARIs の対称性が、手に入るサンプル、データが少ない際の、早くて正確な判断に寄与することを示すことを試みる。

### 2. 因果帰納

進化の過程を経て生き残ってきた生物は、我々も含めて、「目的」、すなわち採餌とメイティング等を達成するための手段を学習してきたが、そのためにも、因果関係を世界から読み取り、それを含む因果関係の網の中に介入し、望みの目的を果たす因果推論は極めて重要な活動・能力である。未知の環境では、複数の事象の間の共起関係を手がかりとして用いて、ある事象が別の事象の原因あるいは結果であるかを推測し判断する必要がある。認知心理学の研究では、事象の間の因果関係の強度と、そもそも因果関係がそれら事象の間に存在するかという因果関係の構造の問題が扱われる。後者は因果ベイズネット理論の発展により可能になり、研究の趨勢は強度から構造に移ってきた。しかしながら、強度の研究には未だに解決されない重要な問題がある。それは共起情報からの因果帰納のモデルに決定的なものがないという点である。そこで、本研究では新しいモデルを提案する。

### 3. 因果帰納の従来モデルと双条件付確率

まず、因果強度推論研究の基本的な枠組みを設定する。事象  $C$  と  $E$  があり、 $E$  は現在着目している結果(たとえば症状: 肩こり)であるとする。それに対して  $C$  が原因だとは判明していない状況を考えているため、 $C$  は原因ではなく、原因の候補

(たとえば摂取物: コーヒー)である。事象  $C$  と  $E$  の在不在をそれぞれ  $C, \neg C, E, \neg E$  とすれば、 $C$  と  $E$  の共起情報は表1のような  $2 \times 2$  の分割表で表現でき、モデルは  $(a, b, c, d)$  の関数となる。このような因果推論の枠組みを単純因果帰納 elemental causal induction [2] と呼ぶ。

単純因果帰納の最も代表的なモデルは [4] の  $\Delta P$  である。

$$\Delta P = P(E|C) - P(E|\neg C) \quad (1)$$

$$= \frac{a}{a+b} - \frac{c}{c+d} = \frac{ad-bc}{(a+b)(c+d)} \quad (2)$$

この指標は近年の因果帰納理論でも根幹として組み込まれている。第一項  $P(E|C)$  に対して  $P(E|\neg C)$  は科学実験でのいわゆるコントロールであるため、科学者の考えを素朴にモデルしているものとも言える。しかしながら、この指標の問題は、人間の因果直感に合わないことである。与えられた  $(a, b, c, d)$  を  $\Delta P$  に代入した値と参加者の回答の相関は低い。実験によっては、完全に無相関となる場合すらある (e.g., [3] の Experiment 2)。

そこで Hattori と Oaksford は、dual factor heuristics (DFH) を提案した [3]。これは  $C$  から  $E$  の予測に関わる  $P(E|C)$  と  $E$  から  $C$  の「診断」に関わる  $P(C|E)$  の二つの条件付確率の幾何平均であり、

$$DFH = \sqrt{P(E|C)P(C|E)} \quad (3)$$

として定義される。式の形から、と考えることができることが知られているが、 $d$  を発散させることにどのような意味があり、環境や認知においてこういった意味で正当であるのか、という点についてはまだ理論的な解決がなされていない。 $d$  が大きいということは、 $P(\neg C, \neg E)$  が大きいということで、これは  $P(C)$  と  $P(E)$  がともに小さいということを意味する。ここで、つまり、事象  $C$  と  $E$  の生起が世界の中では稀である(そのように認知システムにおいて考えられている、あるいは前提されている)ということが前提とされているが、この前提は妥当であると言えよう。我々がその間の因果関係の推定を行おうとする事象は、具体的には「砂漠が乾燥していて暑い」といったありふれたものというよりは、「砂漠なのに雨が降る」といったより稀なものであって、後者が異常気象(ここで異常性は稀少性と深い関係があるだろう)と認識された上で、その原因を探る、というのが我々が因果推論をする事象として、ありふれた事象の間の因果関係を推定する(「なぜ普通のことか」を問う)より自然である。または、ありふれた事象間の関係を問うことは、極端には

「世界はなぜ存在するのか」に似た、むしろ哲学的な問いに近いものにもなりやすいだろう。そのため我々は別の指標を導入する。これは稀少と仮定される事例の比率 proportion of Assumed-to-be Instances (pARIs) である。

$$DFH(E|C) = \sqrt{P(E|C)P(C|E)} \quad (4)$$

$$= \sqrt{P(E|C)P(C|E)} = DFH(C|E) \quad (5)$$

DFHは因果帰納実験データとの相関が極めて高い [3]。しかしながら、DFHには数々の批判が集まっている。最も代表的なものは、DFHの合理性の弱さ、つまりなぜこれがこのように定義されているのか、という点についてのものである [5]。DFHに関しては表1の上のピアソン相関係数である

$$\phi = \frac{ad-bc}{\sqrt{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}} \quad (6)$$

で  $d$  ( $C$  と  $E$  がどちらも不生起の場合の数) を極限に飛ばした

$$DFH(E|C) = \lim_{d \rightarrow \infty} \phi \quad (7)$$

$$= \sqrt{P(E|C)P(C|E)} \quad (8)$$

と考えることができることが知られているが、 $d$  を発散させることにどのような意味があり、環境や認知においてこういった意味で正当であるのか、という点についてはまだ理論的な解決がなされていない。 $d$  が大きいということは、 $P(\neg C, \neg E)$  が大きいということで、これは  $P(C)$  と  $P(E)$  がともに小さいということを意味する。ここで、つまり、事象  $C$  と  $E$  の生起が世界の中では稀である(そのように認知システムにおいて考えられている、あるいは前提されている)ということが前提とされているが、この前提は妥当であると言えよう。我々がその間の因果関係の推定を行おうとする二事象は、「砂漠が乾燥していて暑い」といったありふれたものというよりは、「砂漠なのに雨が降る」といったより稀なものであって、後者が異常気象(ここで異常性は稀少性と深い規範的な関係がある)と認識された上で、その原因を探る、というのが我々が因果推論をする事象として、ありふれた事象の間の因果関係を推定する(「なぜ普通のことか」を問う)より自然である。そのため我々は別の指標を導入する。これは稀少と仮定される事例の比率 proportion of Assumed-to-be Instances (pARIs) である。

$$pARIs = \frac{a}{a+b+c} \quad (9)$$

表1. 単純因果帰納のための2×2分割表

candidate cause	present ( $E$ )	absent ( $\neg E$ )
present ( $C$ )	$a$	$b$
absent ( $\neg C$ )	$c$	$d$

式から分かるように、稀少な $C$ または $E$ が生じた、との条件の下で、 $C$ と $E$ が同時に生じた確率である。つまり、条件付き確率の形で書けば、

$$pARIs = P(C \cap E | C \cup E) = \frac{P(C \cap E)}{P(C \cup E)} \quad (10)$$

となる。

#### 4. モデルの比較: $\Delta P$ , DFH, pARIs

これまでに挙げた三つのモデルを比較する。 $\Delta P$ は、 $C$ が $E$ の必要十分条件であることをモデリングしたものである。つまり、 $P(E|C)$ が高ければ $C$ の生起は $E$ を十分に起こす。 $C$ から $E$ への因果関係があるうがなかるうが、 $C$ の生起は $E$ の生起の予測の指標として有効であることになる。また、 $P(E|\neg C)$ が小さい、すなわち $P(\neg E|\neg C)$ が大きい場合、 $C$ がなければ $E$ が起きないという意味で $E$ の生起にとって $C$ は必要である。 $\Delta P$ が備える二つの条件付き確率はこのような意味を持つ。DFHは、 $C$ による $E$ の予測可能性 $P(E|C)$ と、 $E$ による $C$ の診断可能性 $P(C|E)$ の幾何平均である。 $C$ が起これば $E$ は起こるし $E$ が起こったならば $C$ も起こった、という場合にこの指標は高い値を持つ。ここで $P(C|E)$ と「 $E$ ならば $C$ 」という「診断条件文」の対応関係を前提すれば、診断条件文の対偶が「 $C$ でないならば $E$ でない」であり、これが $P(\neg E|\neg C)$ という確率と関係を持つことから、DFHと $\Delta P$ の類似性を見ることが出来る。つまり、DFHもある種の必要十分条件の成立性を計算する指標となっていると言える。ただし、論理的な命題が対偶と同値であるのに対し、条件付き確率で表現される日常的な条件文は同値ではない。

我々のpARIsであるが、これはde Finettiの主観確率理論という双条件事象の確率であり、日常的な(非数学的な)条件文の連言である双条件文、「 $C$ ならば $E$ であり、かつ、 $E$ ならば $C$ である」の確率、すなわちいわば「双条件付き確率 biconditional probability」であり、すなわち

$$pARIs = P((E|C) \& (C|E)) = P(C \cap E | C \cup E) \quad (11)$$

$$= \frac{P(C \cap E)}{P(C \cup E)} \quad (12)$$

$$(13)$$

が成立する。この意味で、DFHのコンセプトである、

「 $C$ から $E$ への予測条件文と $E$ から $C$ への診断条件文がどちらも真に近い場合に、人間は $C$ と $E$ の間に因果関係を認める」

という主張のよりシンプルな表現となっている。また、人間は直感的な判断を下す際には一つの命題や仮説、条件付き確率しか考えようとしない、ということが知られている(e.g., [1]のsingularity principle)。二つ以上の命題・確率を同時に考慮するには、それなりのモチベーションと能力が必要である。その点、 $\Delta P$ もDFHも、二つの確率を考えた上で差分や平方根を取るのに対し、pARIsが単なる一つの条件付き確率であるのは認知モデルとしては有利であると言える。この意味でpARIsは人間のヒューリスティクス、直感的な判断として、よりもっともらしいとは言えるだろう。

#### 5. メタアナリシス

[3]は過去の実験データに対する包括的なメタアナリシスを行い、DFHが他の既存の30以上の指標の中で最もよくデータに合うことを示した。表2は同じことをpARIsについても行った結果である。DFHと比べて、pARIsはデータとの同等の相関をもち、悪くても.88など、相関の高さはより安定している。また、データとの誤差がDFHよりも小さい。以上から、pARIsは、より単純ながら、因果帰納の実験データに対する、DFHと同等かそれ以上の記述性を持つことが分かる。

#### 6. 漸次的サンプリングにおける双条件付き確率

我々が行う因果帰納においては、共起情報を時間の流れの中で一つ一つ受け取るのが基本である。オンラインで因果関係の強度を推定するには、毎回指標を計算し直すよりも、漸次的に変化量を計算できる方が簡単である。そのため、これまでに検討してきた三指標の変化量について検討する。まず、指標の値は、新しい情報が与えられると変化する。新しい情報とは、この研究の枠組みでは $a, b, c$ あるいは $d$ である。そのため、それぞれが新しく与えられた(つまり、記憶している $a, b, c$ あるいは $d$ の値がそれぞれ+1される)場合の変化量を計算する。三つの指標が四種いずれかの情報を新しく受け取った際の変化量は表3にまとめてある。表中では、 $V = pARIs, V_1 =$

表2. メタアナリシスの結果。値は相関係数、誤差はRMS。AS95などの実験の略号は[Hattori 07]を参照。

	AS95	BCC03.1	BCC03.3	H03	H06	LS00	W03.2	W03.6	average $r$	error
pARIs	.94	.98	.97	.99	.97	.89	.88	.94	.95	9.44
DFH	.95	.97	.95	.98	.96	.89	.83	.89	.95	12.16

$P(E|C), V_2 = P(C|E), V_3 = P(E|\neg C)$  を意味する。また、 $N = a + b + c + d, N_W = N - d = a + b + c$  と表記し、 $N(x)$  は事象  $x$  の生起頻度を表す。つまり、 $N = N(\Omega), N_W = N(C \cup E)$  が成り立つ。

表2から分かるように、連続的に共変動情報をサンプリングしていく場合は、pARIs がほか2指標と比べてはるかに計算が軽く、さらに  $b$  と  $c$  については全く同値に扱う。

## 7. 少数サンプルからの統計推定

[3] は因果帰納を二つのステージに分けた。因果帰納の目的は、ある事象  $E$  の原因候補  $C_1, C_2, \dots$  のうちでどれが真の原因なのかを突き止めることである。ステージ1では事象の生起・共起の観察から、関連のありそうな事象  $C_i$  を一つあるいは複数ピックアップする。その後のステージ2では、ステージ1でより分けられた事象が真に  $E$  の原因であるかを因果ネットワークへの介入によって行う。ここでステージ1では、世界で生起する(しうる)無数の事象のうち、重要なもののみをピックアップすることが肝要である。さもなければ、あまりに多くの疑似原因を拾ってしまうことで、ただでさえコストの高いステージ2が手に負えなくなってしまう。

これを念頭において、[3] の行ったシミュレーションを pARIs についても行っていく。これらシミュレーションは、因果帰納の指標の統計的な性質、とくに少数の共起情報・サンプルしか得られない場合に、その指標がどのような判断を可能とするか、を試すものである。以下のシミュレーションは、[3] の Simulation 2 (Fig. 5) に対応する。

### 7.1 シミュレーション: 漸次的サンプリングによるオンラインの相関推定

因果帰納の指標にとって最も重要なのは、少数のサンプルが少しずつ与えられるより現実的な状況で相関係数を近似していく様子である。図1, 2, 3にそれぞれ指標(DFH,  $\Delta P, \phi, \text{pARIs}$ )の平均、分散、そして指標が計算できなかった割合の時間発展を示す。図4は、DFHの各種の値から pARIsの値を引いた差である。 $\phi_0$ の値は0, .1, ..., 1の場合それぞれを見ている。環境としては稀少性を仮定し、 $P(C) = P(E) = 0.2$ とした。

## 8. 総合議論

図1, 2, 3では、漸次的なサンプリングにおけるオンラインの  $\phi_0$  の近似における振る舞いを見た。図2から、十分なサンプルが集まればどの指標も  $\phi_0$  を良く近似することが分かる。DFHはサンプル数1で計算できるのは  $a$  が最初に与えられた場合であるため、平均は1.0からスタートして  $\phi_0$  の値に降下していく。 $\phi$ の傾向も同様であるが、収束は遅く分散も非常に大きい。 $\Delta P$ は最初から平均的に  $\phi_0$  の値を取る。pARIsは他とは異なり、 $\phi_0$  がかなり大きくないと値が大きくなれないという点で[7]の連続型 pARIsの性質と一致する。

DFHと  $\Delta P$  についてはトレードオフの関係が見られ、 $\Delta P$ は平均的にはごく少数のサンプルの時点からよく近似するが、図3にあるように分散が大きく信頼性が低い。対してDFHは収束が遅いが分散が小さい。これは、DFHがサンプル数1で計算できる場合は  $a$  が与えられた場合のみであるため、値が必ず1.0から始まり、そこから降下する一方、分散は0.0から始まるからである。そのため初期の分散の小ささには意味がない。 $\phi$ と  $\Delta P$  については、分母が0となり計算出来ない場合がかなり多く、その場合は指標がそもそも何の役にも立たないこととなる。DFHも、 $a > 0$ か  $b, c > 0$  のどちらかが成立しないとやはり計算できない。

対して pARIs は、 $\Delta P$  より早く ( $a, b, c$  のいずれかが正ならば定義されるため) 平均で収束し、分散は実情を考慮しサンプル数10以降を見れば、分散の小ささはDFHと互角 ( $\phi_0$  の値によって前後する) であることが分かる。さらに顕著なのは、図3の pARIs の計算可能性である。 $\$a, b, \$$  または  $c$  のいずれかが0で無い限り pARIs は値を持つため、計算不可能なサンプル系列は非常に少ない。算できる。また、表3に示したように、pARIsの漸次アップデートは他指標よりも易しい。

平均の収束に関しては、全  $\phi_0$  値に対する平均的な値の正確さ ( $\phi_0$  との誤差の小ささ) だけでなく値の弁別性 = ダイナミックレンジの大きさも重要である。これに関しては  $\phi_0 = 0.0$  で pARIs = 0.1, DFH = 0.2、 $\phi_0 = 1.0$  で pARIs = DFH = 1.0 と、pARIsの方が優れている。

最後に、図4にDFHと pARIsの値の差(DFH値から pARIs値を引いたもの)を示す。左上が平均値差、右上が標準偏差の差、左下は計算不可能

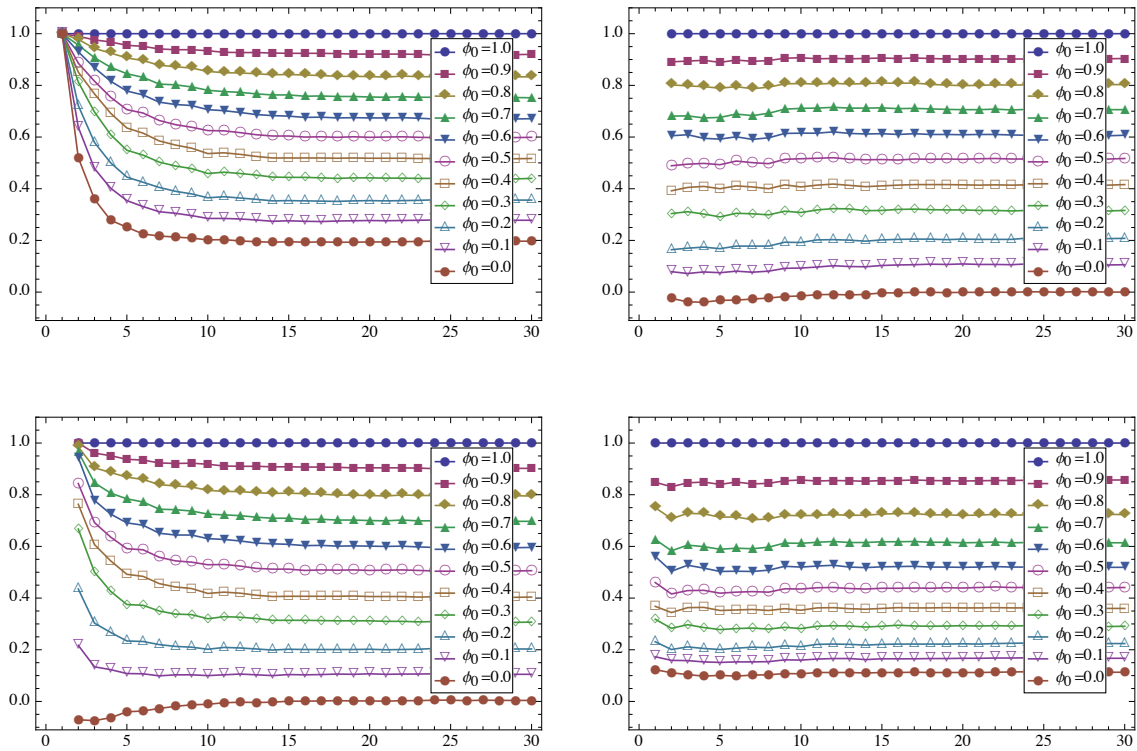


図1. 指標の平均の時間発展。横軸がサンプル数、縦軸は平均の値。左上、右上、左下、右下はそれぞれ DFH,  $\Delta P$ ,  $\phi$ , pARIs.

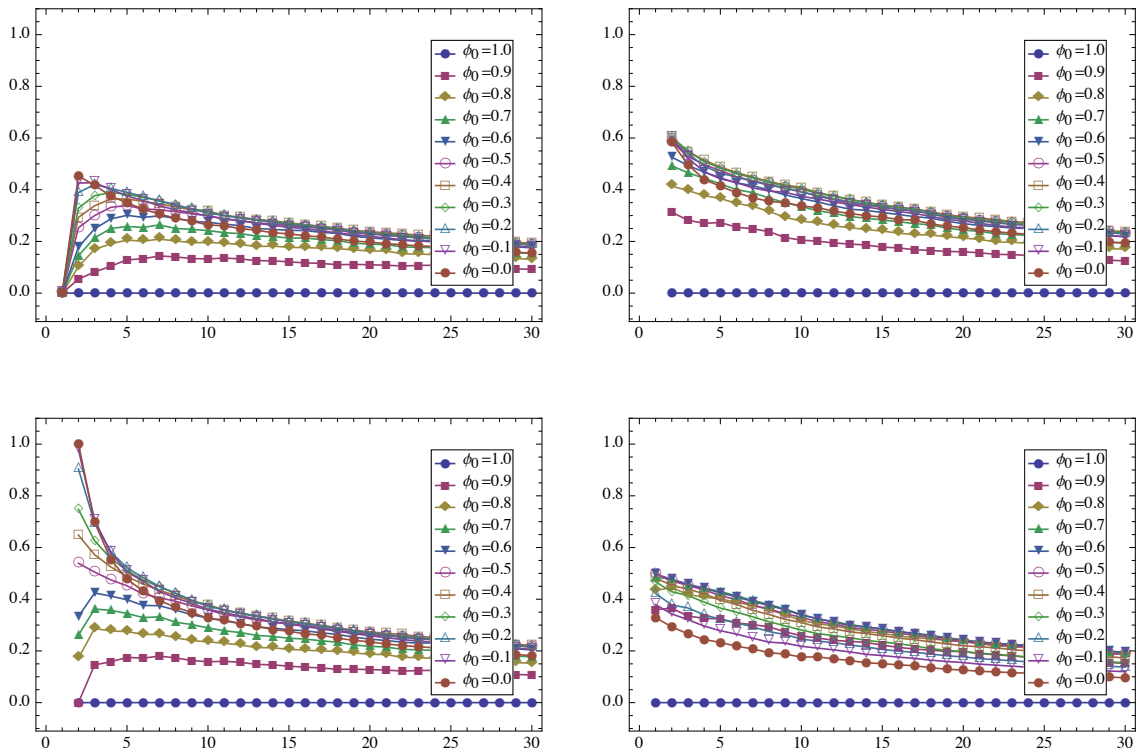


図2. 指標の分散の時間発展。縦軸は標準偏差。4指標の並びは図1と同様。

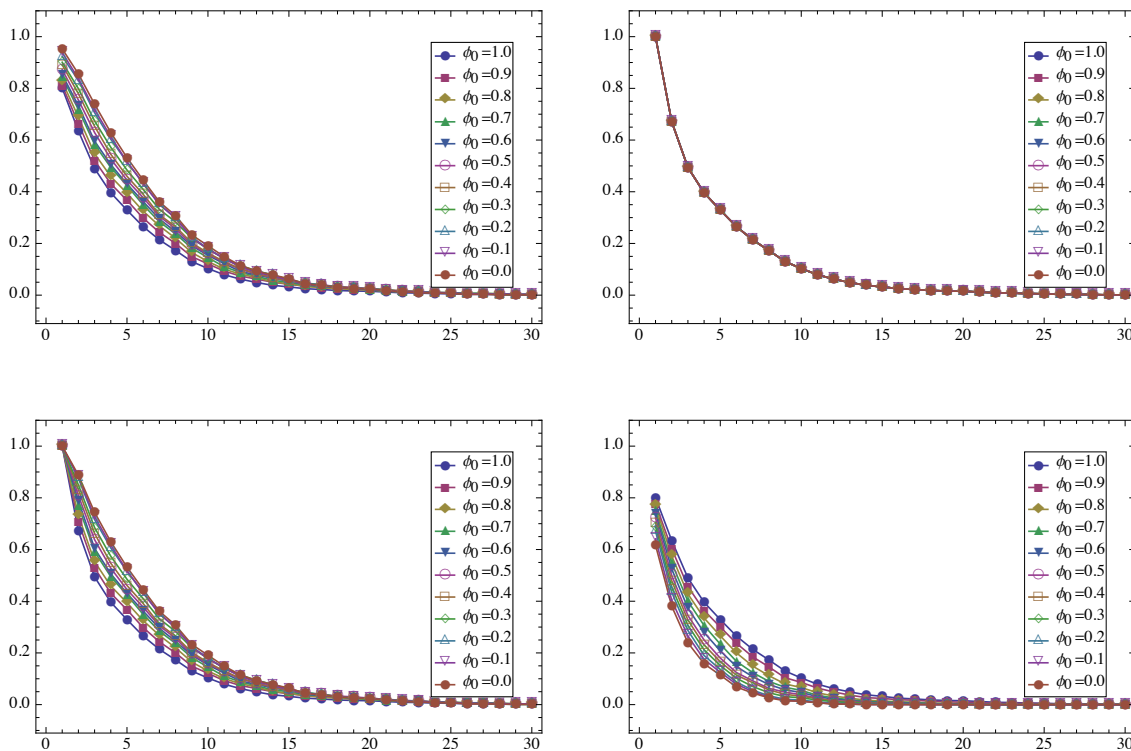


図3. 指標が計算できないサンプル系列の割合の時間発展。縦軸は総サンプル系列(1000系列)のうち、分母が0となって計算できなかった系列の割合。4指標の並びは図1と同様。

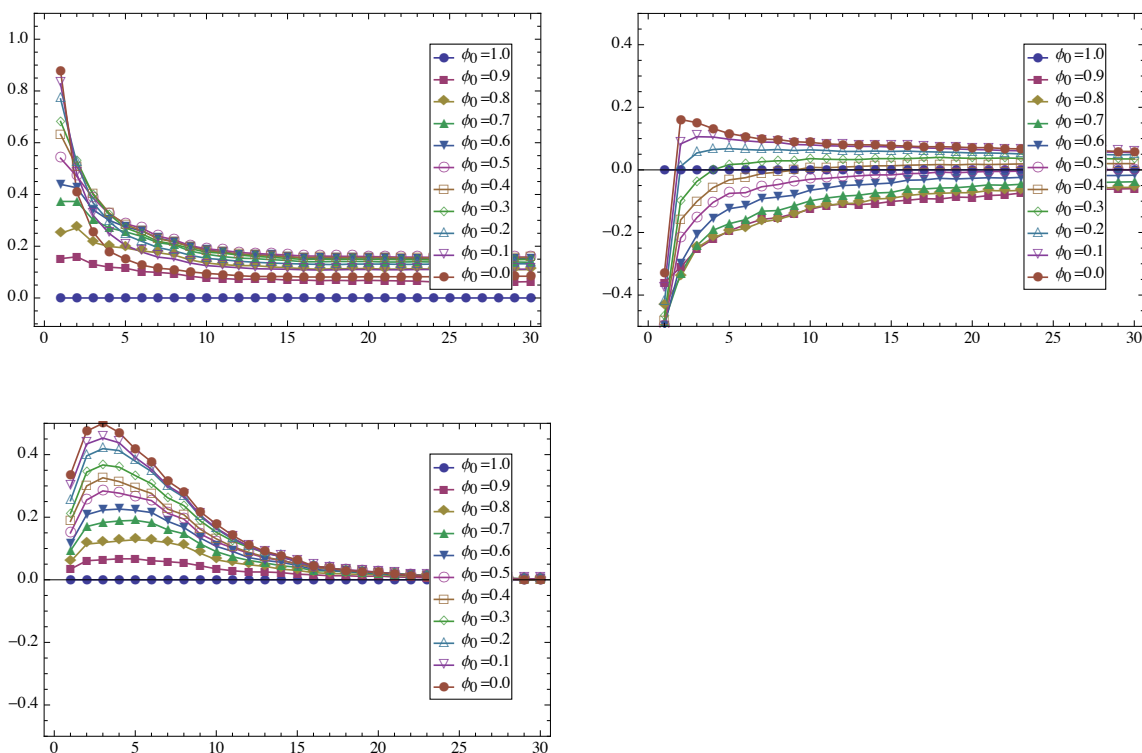


図4. DFHとpARsの値の差(DFH値-pARs値)。左上が平均値差、右上が標準偏差の差、左下は計算不可能なサンプルの割合の差。

表3. pARIs, DFH, ΔP の漸次サンプリングにおける変化量

新しいサンプル	pARIs = V	DFH = $\sqrt{V_1 V_2}$		ΔP = V <sub>1</sub> - V <sub>3</sub>
a	$\frac{1-V}{N_W+1}$	$\frac{N(C\&E)+1}{\sqrt{(N(C)+1)(N(E)+1)}}$	$-\frac{N(C\&E)}{\sqrt{N(C)N(E)}}$	$\frac{1-V_1}{N(C)+1}$
b	$\frac{-V}{N_W+1}$	$\frac{N(C\&E)}{\sqrt{(N(C)+1)(N(E))}}$	$-\frac{N(C\&E)}{\sqrt{N(C)N(E)}}$	$\frac{-V_1}{N(C)+1}$
c	$\frac{-V}{N_W+1}$	$\frac{N(C\&E)}{\sqrt{(N(C))(N(E)+1)}}$	$-\frac{N(C\&E)}{\sqrt{N(C)N(E)}}$	$\frac{1-V_3}{N(-C)+1}$
d	0	0		$\frac{-V_3}{N(-C)+1}$
性質	2パターンのみ かつ単純	3パターン; 代数的簡略化不可		全4パターン; 各変化量はpARIs同様に単純であるが、 二つの条件付き確率が独立に記憶され また更新される必要あり

なサンプルの割合の差である。平均値差は、図 fig:sequential の左上と右下を比べれば分かるように、DFHが1.0から下降しなければならないのに対して、pARIsはサンプル数1の時からすでに値の収束先に平均値があるからに過ぎない。分散の差を見ると、特にφ<sub>0</sub>が大きい(φ<sub>0</sub> = 1.0を除く)場合に、DFHの方が分散が小さく、値の信頼性が高いことが分かる。といっても、DFHの値は、計算できる限り必ず1.0から始まるので、値にはあまり使い途がない。あえていえば、図 fig:sequential の左上で見ることが出来るように、値の下降の変化量・傾きによって、φ<sub>0</sub>の値を推定することができるかもしれない。しかしその変化量は、表3で示したように、さほど簡単に計算できるものではない。計算不能な場合については、指標の定義式から分かるように、必ずpARIsの方が計算できる可能性が高い。とくに、φ<sub>0</sub>が小さいときに、サンプル数が2から6の間、全体の2割を超える場合で、pARIsが計算できるのに対し、DFHは計算不能である。これを考えれば、DFHの値の下降の変化量を使うのは現実的に難しいことが分かる。

まとめると、pARIsは、小数のサンプルしか与えられていない場合においても、正確さも信頼性も弁別性も高い値を、他指標よりも多くの場合に計算出来ることが分かる。この特性は[3]でのN<sup>W</sup>-サンプリング、つまりサンプル数としてdを数えない場合にはさらに顕著に現れる。特に、pARIsはN<sup>W</sup>-サンプリングの下では、完全に全ての場合に計算ができ、また分散も相対的に小さくなる。ビッグデータが耳目を集めているが、人間が扱うデータはかなり小さい場合がある。これは判断をリアルタイムでなす、つまり時間に追われ、データの収集に時間も認知資源も割けない場合にはより問題となる。人間が、そういった状況で有効に働く因果直感(pARIs)を持っていることには、かなりの合理性があると思われる。

### 9. 結論

本論では、対称性推論のモデルとして、因果帰納における双条件付確率すなわちpARIsを導入し、他の代表的な統計的指標と比較し、その性能を評価した。pARIsは足し算と割り算のみ用いる極度に単純な条件付き確率形式を持ちながら、既存のモデルが持つ心理学・言語学的な意味をより明確に備え、かつ人間の因果帰納傾向を最も良く記述するとともに、統計推論のシミュレーションでは、素早く正確な相関性の推定を、従来の指標よりも広汎なサンプルに対して行う。これは人間の因果帰納の傾向、因果関係に関する直感の適応的意味を示唆する。また、pARIsは真理値表タスクなど他の推論形式にも現れる。そのため、演繹や確率判断などの他の推論分野との統合の軸として働くことも期待できる。

### 参考文献

- [1] Jonathan St. B. T. Evans. *Hypothetical Thinking: Dual Processes in Reasoning and Judgement*. Psychology Press, 2007.
- [2] Thomas L Griffiths and Joshua B Tenenbaum. Structure and strength in causal induction. *Cognitive Psychology*, Vol. 51, No. 4, pp. 334-84, December 2005.
- [3] Masasi Hattori and Mike Oaksford. Adaptive Non-Interventional Heuristics for Covariation Detection in Causal Induction: Model Comparison and Rational Analysis. *Cognitive Science: A Multidisciplinary Journal*, Vol. 31, No. 5, pp. 765-814, September 2007.
- [4] Herbert M. Jenkins and William C. Ward. Judgment of Contingency between Responses and Outcomes. *Psychological Monographs: General and Applied*, Vol. 79, No. 1, pp. 1-17, 1965.
- [5] Hongjing Lu, Alan L Yuille, Mimi Liljeholm, Patricia W Cheng, and Keith J Holyoak. Bayesian Generic Priors for Causal Learning. *Psychological Review*, Vol. 115, No. 4, pp. 955-984, 2008.
- [6] 修二篠原, 亮田口, 浩一桂田, 恒雄新田. 因果性に基づく信念形成モデルとN本腕バンディット問題への適用. *人工知能学会論文誌*, Vol. 22, No. 1, pp. 58-68, 2007.
- [7] 基上浦, 達二高橋. 因果帰納確率モデルの情報学的考察. *JSAI 2013 (2013年度人工知能学会全国大会(第27回)) 予稿集*, pp. 1L5-OS-24c-3, 2013.

- [8] 雅史服部. 推論と判断の等確率性仮説：思考の対称性とその適応的意味. 認知科学, Vol. 15, No. 3, pp. 408-427, 2008.