

線形代数の教授内容の関連性と指導のポイントに関する考察
An analysis for linear algebra learning process and its instructional implication

川添 充[†], 岡本 真彦[‡], 高橋 哲也[†],
Mitsuru Kawazoe, Masahiko Okamoto, Tetsuya Takahashi

[†] 大阪府立大学高等教育推進機構, [‡] 大阪府立大学人間社会学部
[†] Faculty of Liberal Arts and Sciences, Osaka Prefecture University,

[‡] School of Humanities and Social Sciences, Osaka Prefecture University

kawazoe@las.osakafu-u.ac.jp, okamoto@hs.osakafu-u.ac.jp, takahashi@las.osakafu-u.ac.jp

Abstract

The purpose of this study is to reveal expertise models for a course of linear algebra in university. We carried out to sixteen tests for 118 university students from 2009 to 2010. These test contained 43 problems which covered from basic procedural computations to complex conceptual problems solving in the linear algebra domain. The results from our analysis show that there are some different expertise models for linear algebra. First is a non-learning model. They can not learn the computational skills in linear algebra. Second is a rote learning model. They learn procedural computational skills, but do not learn the meanings of the procedure. Third is a meaningful learning model. They learn both the procedural skills and the conceptual understanding in abstract vector space. Two instructional implications are obtained from this study. One is that learning basic computational procedures based on conceptual understandings reduces the failure in learning abstract vector spaces. The other is that in learning Gram-Schmidt orthogonalization, understanding the procedure in Euclidean space leads understanding it in polynomial space.

Keywords — Learning process, Linear algebra, Mathematical education

1. 線形代数の学習過程

数学は、理系分野の学問の基礎となるだけでなく、近年では文系分野でもその重要性が認められつつある。理系の学生の場合、大学1年次から数学の基礎科目を複数履修することになり、2年次までの間に多くの数学的概念や計算手続きの理解・習得が求められる。学生のつまずきが多くみられる線形代数(通常のカリキュラムでは1年次に行われる数学科目)では、1年間に非常に多くの抽象概念や計算手続きを学ぶことになる。たとえば、大阪府内のある公立大学の工学部でのカリキュラムを分析し、習得すべき内容をまとめると、

表1のようになる。これは、標準的な理系のカリキュラムのもとでの線形代数の内容である。

表1 線形代数における学習内容一覧

学期	項目番号	種別	内容
前期	L1	概念	基本変形と基本行列との積の対応を理解する。
	L2	概念	基本変形でできる操作とできない操作を見分けられる。
	L3	計算	掃き出しを実行できる。
	L4	計算	階段行列への変形を実行でき、階数を求められる。
	L5	概念	階段行列かどうかの判別ができる。
	L6	計算	正則性判定と逆行列の計算が実行できる。
	L7	概念	正則性判定と逆行列の計算での基本変形の意味を理解する。
	L8	計算	連立1次方程式を拡大係数行列の変形で解くことができる。
	L9	概念	拡大係数行列の変形が連立1次方程式の同値変形であることを理解する。
	L10	計算	行列式を基本変形を用いて計算できる。
	L11	概念	行列式の性質(多重線形性や交代性)を理解する。
後期	L12	概念	部分空間の定義を理解し、部分空間と非部分空間を区別できる。
	L13	計算	連立1次方程式の解空間の基底と次元を求められる。
	L14	計算	行列の列ベクトルで生成される部分空間の基底と次元を求められる。
	L15	概念	基底と次元の計算における基本変形の意味を理解する。
	L16	概念	1次写像とそうでない写像を区別できる。
	L17	計算	1次写像の線形性を利用した計算ができる。
	L18	計算	1次写像の像と核の基底と次元を求められる。
	L19	概念	1次写像の像と核の基底と次元
	L20	計算	座標(数ベクトル空間)を求められる。
	L21	計算	表現行列(数ベクトル空間の1次写像)を求められる。
	L22	計算	座標(多項式空間)を求められる。
	L23	計算	表現行列(多項式空間の1次写像)を求められる。
	L24	計算	実数ベクトル空間の内積が計算でき、長さの計算、直交性の判定ができる。
	L25	計算	複素数ベクトル空間の内積が計算でき、長さの計算、直交性の判定ができる。
	L26	計算	多項式空間の内積が計算でき、長さの計算、直交性の判定ができる。
	L27	計算	数ベクトル空間でシュミットの直交化法を適用できる。
	L28	計算	多項式空間でシュミットの直交化法を適用できる。
	L29	概念	直交補空間かどうかを区別できる。
	L30	計算	数ベクトル空間での直交補空間を求められる。
	L31	概念	固有値と固有ベクトルの定義を理解する。
	L32	計算	行列の対角化を実行できる。

表1における32項目を、そこで必要とされる概念的関連性に基づいて結合したモデルを図2に示す。このモデルは、あくまで教授する側の視点に基づいて作成されたものであり、モデルに示されている関連性に従って学習が行われているかどうか、また、このようなモデルにもとづいた順序で授業を行うことがよいかどうか、などについての検証が必要である。

2. 先行研究の概観と本研究の目的

大学での数学の学習においては、多くの大学生がその習得につまずいている。とくに、線形代数においては、1年間に多くの数学的概念や計算手続きを学び、その正しい理解と定着のためには計算手続きとその概念的意味を含んだ理解のレベルに到達する必要があるが、概念や計算手続きの混

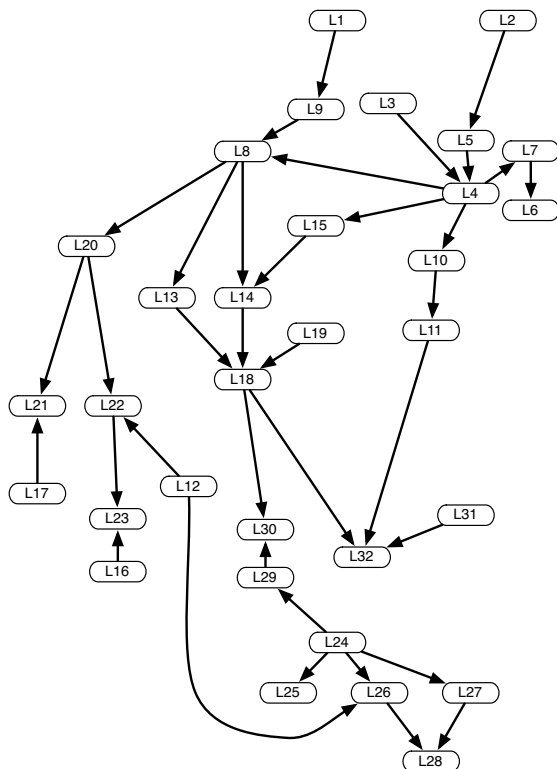


図1 線形代数の学習内容の間の関連性

同が観察されるなど、大学での数学教育が効果的に行われているとはいえない[1]。この原因としては、大学生が高校までの学習を通して、公式や計算手続きの背後にある数学的概念を理解せず、公式や計算手続きを暗記的に学習するような受動的な学習傾向を獲得していることと、大学の数学教員の教え方が合致していないことにあるのではないかと考えられる。このような状況が、大学生の学力低下に起因するのか、それとも大学教員の教授法のまずさに起因するのかを、断定できる実証的なデータは存在しないが、少なくとも現代の大学生に対して、これまで通りの学習内容を、これまで通り、一方的に教員が説明するという授業形式で教えることが、大学生の数学力向上に十分に寄与しているとはいえない。この点について、市原と芝野[2]が、ゼミ形式の指導の中で、学生と教員がお互いの理解をすり合わせるようにしながら学生の数学的理解を導く過程を報告しているが、一斉授業方式の授業では、学生の分かっていない感覚を教師が捉えにくく、そのために効果的な指導が行えていないという側面があるのではないかと考えられる。このような大学数学の授業の問題点を解消するためには、高等数学で扱う抽象的な数学的概念がどのように理解され、あるいは、どのようにつまづくのかという認知過程を明らかにすることが必要である。

大学での数学の理解度については、線形代数の授業内容の理解度に関する Dorier [3] があるが、計算手続きの習得について、単なる暗記による習得と、概念理解に基づく習得とを区別した分析までは踏み込んでいない。線形代数については、抽象ベクトル空間における種々の計算手続きは概念理解が伴わなければ習得・定着が難しく、計算手続き暗記型の学習者が多数存在することが、線形代数の授業でのつまずきの原因になっていると考えられている。これを検証するためには、計算手続きの習得と概念理解との関連性について分析する必要がある。そこで、本研究では、線形代数の学習について、計算手続きの習得とその背後にある数学的概念の理解度に関する調査を行い、

- (a) 計算手続きの意味を理解せず、形式的な手続きだけを暗記する暗記型の学習者の存在と実態、
- (b) 抽象ベクトル空間における種々の計算手続きの習得と概念理解との関連性

についての分析・解明を行う。これにより、大学初年次の学生の数学的概念理解のつまずき箇所や、計算手続きが正しく習得できない学生の誤り原因を明らかにして学習者の理解過程を解明するとともに、その結果から教育的示唆を得ることが本研究の目的である。

以下では、調査の概要を述べた後、調査データに対して行った分析結果について報告する。本調査データの分析については、今回行った分析以外に、すでに筆者らによって2010年度の日本数学教育学会第43回数学教育論文発表会で発表された分析2つを含めて報告する[4]。今回はこれら3つの分析結果をあわせて考察を行うため、分析結果の節では、[4]の結果についてもその概要を示しておく。最後に、3つの分析をまとめた考察を示す。

3. 調査の概要

大阪府内の公立大学の工学部1年次配当の線形代数(前後期とも週1コマ)の授業クラスで、全授業期間にわたって授業内容の理解度に関する調査を行った。

3.1 調査時期と対象者

調査は、まず、学習パターンの分析のためのデータ収集を目的として、平成21年4月から平成22年2月までの期間に、大阪府内の公立大学の工学部1年次向けの線形代数(前期1コマ・後期1コマ)の授業を対象に行われた。さらに、問題間の関連分析のため、22年度にも、大阪府内の公立大学の工学部1年次向けの線形代数(前期1コマ・後期

1 コマ) を対象に追加調査が行われた。授業クラス数・履修者数はそれぞれ、平成21年度が、授業者の異なる2クラスで履修者計154名、平成22年度が、1クラスで履修者数81名であった。

3.2 調査内容と方法

表1に基づき、大学1年次の線形代数で1年間に学ぶ主要な数学的概念、計算手続きについて、その理解度を測るための調査問題を作成し、当該概念や手続きを学習した次の回の授業の冒頭で10分間程度の小テストとして実施した。調査問題として、計算手続きを正しく理解できているかを調べるための計算問題と、数学的概念や計算手続きの意味を理解できているかを調べるための概念問題の2種類の問題を作成し、記述式のテストとして実施した。各学期の最初の授業でもプレテストとして小テストを実施した。調査試験の実施回数は各学期の第1回目に行ったプレテストを含めて全16回、調査問題の個数は全43問であった。プレテストも含めた各調査問題の内容および授業内容・学習目標(表1)との対応を表2に示す。また、小テストに含まれる43問の問題を、そこで必要とされる概念的関連性に基づいて、図1にならって結合したモデルを図2に示す。

表2 調査試験内容一覧

学期	授業(回)	問題番号	問題種別	学習目標	内容
前期	1	P1	概念	—	プレテスト:平面ベクトル
		P2	概念	—	プレテスト:平面ベクトル
		P3	計算	—	プレテスト:連立1次方程式
		P4	計算	—	プレテスト:連立1次方程式
	7	P5	概念	L1	基本行列と基本変形
		P6	概念	L1	基本行列と基本変形
		P7	概念	L2	基本変形
	8	P8	計算	L3	掃き出し
		P9	計算	L4	階段行列と階数(ランク)
		P10	概念	L5	階段行列と階数(ランク)
	9	P11	計算	L6	正則性判定と逆行列
		P12	概念	L7	正則性判定と逆行列
	10	P13	計算	L8	連立1次方程式
		P14	概念	L9	連立1次方程式
後期	1	P15	計算	L10	行列式
		P16	計算	L10	行列式
		P17	概念	L11	行列式
	2	P18	計算	—	プレテスト:連立1次方程式
		P19	計算	—	プレテスト:行列式
	3	P20	概念	L12	部分空間
	4	P21	計算	L13	基底と次元
		P22	計算	L14	基底と次元
		P23	概念	L15	基底と次元
	6	P24	概念	L16	1次写像
		P25	計算	L17	1次写像
	7	P26	計算	L18	1次写像の像と核の基底と次元
		P27	概念	L19	1次写像の像と核の基底と次元
	8	P28	計算	L20	座標(数ベクトル空間)
		P29	計算	L21	表現行列(数ベクトル空間の1次写像)
		P30	計算	L22	座標(多項式空間)
	9	P31	計算	L23	表現行列(多項式空間の1次写像)
		P32	計算	L24	実数ベクトル空間の内積
		P33	計算	L25	複素数ベクトル空間の内積
	10	P34	計算	L26	多項式空間の内積
		P35	計算	L27	数ベクトル空間の正規直交基底
		P36	計算	L28	多項式空間でのシュミットの直交化法
	11	P37	計算	L27	数ベクトル空間でのシュミットの直交化法
		P38	概念	L29	直交補空間
		P39	計算	L30	数ベクトル空間での直交補空間
	12	P40	概念	L31	固有値と固有ベクトル
		P41	概念	L31	固有値と固有ベクトル
		P42	概念	L31	固有値と固有ベクトル
		P43	計算	L32	行列の対角化

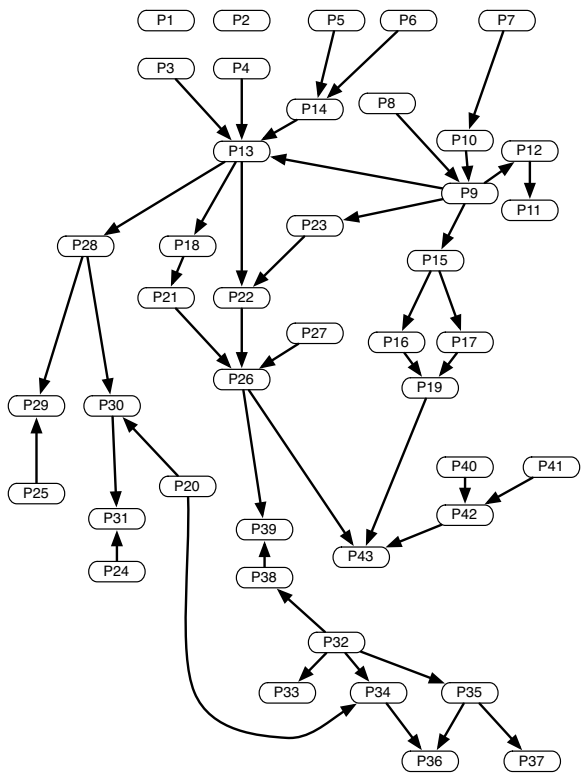


図2 線形代数の理解過程のモデル

表3 反応カテゴリー

反応カテゴリー	定義
正答	正解している
不十分な解答	解答の表現方法や論述に不備がある、あるいは、非効率な解法を選択
概念的誤り	概念的な誤りを含んでいる
計算間違い	計算間違いをしている
未完了	無解答もしくは解答に至らず

4. 分析

本節では、調査データに対する3つの分析結果を示す。なお、はじめの2つは、第43回日本数学教育学会数学教育論文発表会で発表した内容であるので、概要だけ示す。詳しくは、[4]を参照されたい。

4.1 分析(1)

平成21年度の調査対象154名のうち、全16回の調査試験を一度も欠席しなかった77名のデータのみを分析の対象として、小テストに含まれる各問題への反応パターンのクラスター分析を行った。表3に示した5つのカテゴリーについて、該当する場合を「1」、該当しない場合を「0」として、77名の対象者ごとに、問題数43×反応カテゴリー5の215個の1もしくは0の2値をもつデータを作成し、77行×215列のデータをクラスター分析のローデータとした。

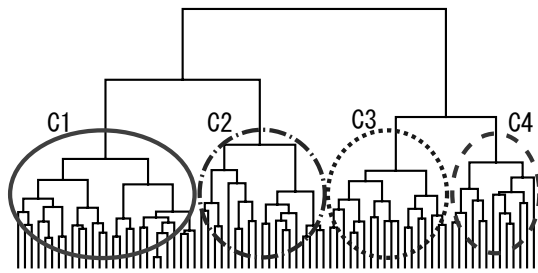


図3 クラスター分析結果

クラスター分析の結果を、図3に示した。このデンドログラムからは、27名を含むC1、19名を含むC2、18名を含むC3、そして、13名を含むC4の4つのクラスターが存在することが明らかになった。

まず、プレテストへの反応から、C1とC2が既存知識が高いクラスター、C3とC4が既存知識が低いクラスターと考えられた。

さらに詳しく各クラスターをみると、C1は全体的に正答率が高く、概念的誤りも少ないため、計算手続きの背後にある数学的理論や概念も理解できていると考えられる。

C2は、前期については、正答率がC1と同程度に高く、概念的誤り率もC1と同様に低いが、後期の抽象ベクトル空間を扱う問題では正答率が下がり、概念的誤り率が上がる傾向にあるため、行列に関する基礎的な計算手続きは十分習得できているが、抽象的なベクトル空間の概念理解が不十分であると考えられる。

C3は、標準的な問題についての正答率は一定レベルに達しているが、計算手続きの背後にある数学的理論や概念に対する理解が不十分であると考えられる。

C4は全体的に正答率が低く、概念理解が不十分で、基礎的な計算手続きの習得も困難なクラスターと考えられる。

以上の分析から、線形代数の習熟のパターンには、

- (i) 基礎的な計算手続きの習得でつまづく、
- (ii) 計算手続きはある程度習得できるが、計算手続きの背後にある数学的理論や概念の理解が伴わない、
- (iii) 計算手続きをその背後にある数学的理論や概念も含めて理解・習得する

の3つのパターンがあるといえる。

4.2 分析(2)

図2において、近接する2つの問題間の正答誤答パターンが類似しているかどうかを分析する

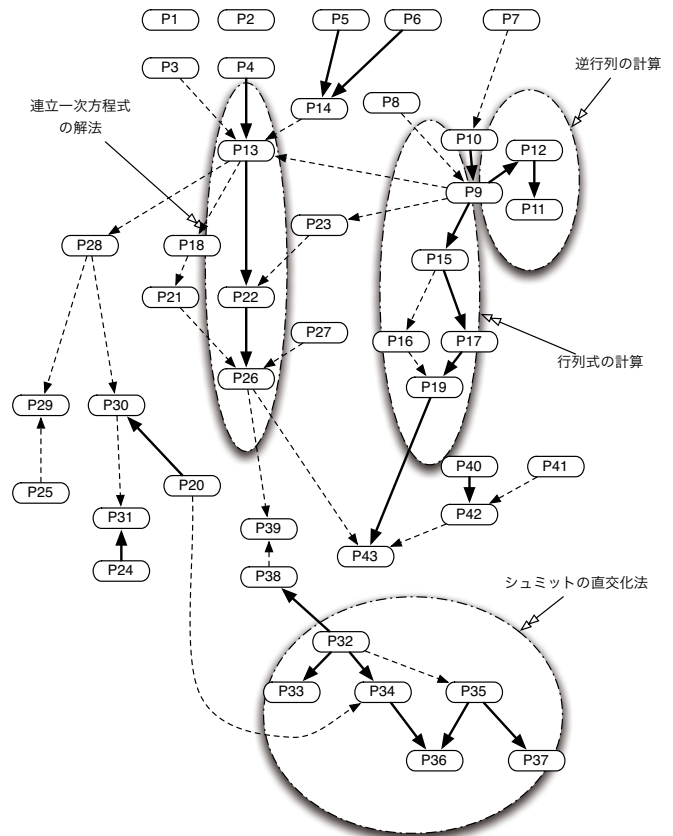


図4 線形代数の理解過程モデルにおける関連性

ことによって、どの理解ルートが困難であるのかの分析を行った。まず、図2で結合づけられた2問の正答・誤答に関連性があるかどうかをMcNemar検定を用いて調べた。図4では、2つの問題間にMcNemar検定で有意な関連性が示されたものを実線矢印で示している。これらの関連性のある問題系列をみると、本研究で対象とした線形代数の学習内容の中には、図4に示したように、「逆行列の計算手続きについてのルート」「行列式の計算を中心として行列の対角化へ至るルート」「連立1次方程式の解法を中心として1次写像の像と核の基底と次元に至るルート」「内積とシュミットの直交化法についてのルート」の4つの理解ルートが存在することが分かった。

表4は、分析(1)のC1～C4について、連立1次方程式の理解ルート上の4問を連続して解くことができた人の割合を示したものである。C1は半数が最後まで正答を続けられたのに対して、C2は基底などの抽象的概念に関する問題のところではつまづく人が多く、C3、C4は前期の連立1次方程式の段階でつまづく人が多いことが分かる。このことから、線形代数のつまづき方には、

- (ア) 基礎的な計算手続きの習得でつまづく、
- (イ) ベクトル空間の抽象的概念の習得でつまづく、

表 4 理解ルート上での連続正答率

	P4	P13	P22	P26
C1	96.3	63.0	59.3	55.6
C2	100	59.7	31.6	5.3
C3	94.4	33.3	27.8	22.2
C4	92.3	46.2	30.8	7.7

の 2 つのタイプがあるといえる。

4.3 分析(3)

分析(1), (2)では、学習者を分類することによって、そこから間接的に理解過程を推察したが、必ずしも学習者の実際の理解過程と一致しているとは言えない。学習者の理解過程を解明し教育的示唆を得るためには、問題に対する学習者の反応データから、問題間の関係をとらえ直した上で、分析(1), (2)の結果と合わせて考察する必要がある。そこで、分析(3)として、問題への学習者の反応データから、問題に対するクラスター分析を行った。

調査データとしては、平成21年度と22年度の調査結果データを用いた。平成21年度と22年度を合わせた履修者数は合計235名であり、このうち全16回の調査試験を一度も欠席しなかった118名のデータを分析対象とした。

クラスター分析においては、調査問題43問のそれぞれに対する調査対象者118名の正誤パターン(正解1, 不正解0)のデータとしての、43行×118列のデータをクラスター分析のローデータとした。クラスター分析の結果、図5に示したように、43問の問題は、クラスAとクラスBの2つに大きくわかれ、さらにA, Bがそれぞれ4つのサブクラスa, b, c, dとe, f, g, hに分かれることが見出された。

これらのクラスターについて考察した結果、次のような特徴が見出された。

クラスAは、高度な概念を含まず単純な計算手続きの習得のみで正答できる問題を中心としたクラスであり、クラスBは、高度な抽象的概念の理解を必要とする計算問題や計算手続きの意味を正しく述べられるかを問う概念問題を中心としたクラスである。クラスAには、掃き出し法による連立1次方程式の解法や逆行列の計算、行列式の計算など、一般に比較的習得が容易とされている問題が多く含まれている。一方、クラスBには、1次写像の像や核の基底と次元を求める問題や、シュミットの直交化法、行列の対角化など、一般に習得困難とされる問題が多く含まれている。実際、表5をみると、クラスAがクラスBに比べて、正答

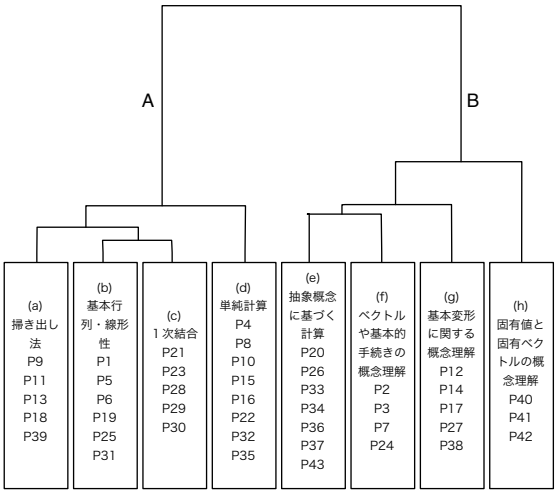


図 5 クラスター分析結果

表 5 クラスごとの反応率

クラス	サブクラス	問題番号	正答率	概念誤り率	計算誤り率	未完了率	不出現率 十分率 解答
A	a	P9	0.66	0.16	0.16	0.04	0.00
		P11	0.58	0.12	0.31	0.00	0.04
		P13	0.61	0.19	0.20	0.01	0.19
		P18	0.71	0.41	0.10	0.00	0.10
		P39	0.63	0.24	0.08	0.06	0.00
	b	P1	0.74	0.23	0.00	0.03	0.11
		P5	0.62	0.35	0.00	0.03	0.00
		P6	0.75	0.20	0.00	0.07	0.00
		P19	0.64	0.18	0.09	0.11	0.00
		P25	0.71	0.17	0.06	0.06	0.00
	c	P21	0.66	0.19	0.08	0.13	0.00
		P23	0.53	0.00	0.46	0.00	0.02
		P28	0.58	0.31	0.05	0.06	0.00
		P29	0.74	0.15	0.08	0.03	0.00
		P30	0.64	0.18	0.03	0.15	0.00
	d	P4	0.94	0.01	0.02	0.02	0.03
		P8	0.82	0.12	0.06	0.01	0.00
		P10	0.79	0.14	0.03	0.08	0.00
		P15	0.86	0.08	0.06	0.01	0.00
		P16	0.81	0.15	0.01	0.03	0.00
		P22	0.84	0.14	0.01	0.03	0.00
		P32	0.88	0.05	0.05	0.03	0.00
		P35	0.81	0.14	0.00	0.05	0.00
B	e	P20	0.32	0.64	0.00	0.00	0.08
		P26	0.51	0.36	0.14	0.05	0.00
		P33	0.31	0.54	0.15	0.08	0.00
		P34	0.32	0.44	0.20	0.21	0.00
		P36	0.31	0.42	0.16	0.11	0.00
		P37	0.44	0.26	0.27	0.03	0.00
		P43	0.39	0.43	0.15	0.15	0.00
	f	P2	0.40	0.52	0.00	0.15	0.33
		P3	0.50	0.25	0.02	0.03	0.21
		P7	0.34	0.25	0.00	0.13	0.29
		P24	0.53	0.45	0.00	0.00	0.10
	g	P12	0.13	0.18	0.00	0.00	0.69
		P14	0.09	0.14	0.00	0.05	0.82
		P17	0.24	0.35	0.01	0.08	0.36
		P27	0.07	0.60	0.00	0.00	0.00
		P38	0.11	0.89	0.00	0.01	0.03
	h	P40	0.54	0.23	0.00	0.04	0.54
		P41	0.56	0.28	0.00	0.05	0.43
		P42	0.44	0.08	0.37	0.12	0.35

率が非常に高くなっていることが見て取れる。このことから、単純な計算手続きは比較的習得できているが、高度な抽象概念の理解を必要とする計算手続きの習得や計算の意味理解の習得は十分でないことがわかる。また、クラスBについては、計算問題についても概念誤り率が高い傾向にあり、概念習得の難しさが習得を困難にしていることがみてとれる。

クラスAは、単純な計算手続きを中心としたクラスのため正答率が非常に高くなっているとはいえ、その習得の実態は、概念理解を伴ったものとはいえないことがサブクラスをみることで浮かび上がってくる。クラスAのサブクラスaに含まれる計算手続きの意味理解に関する問題がクラスBサブクラスgに含まれているという関係になっており、計算手続きの習得とその計算の意味理解に関連性がみられないという結果となっている。実際、表5をみると、サブクラスaの計算問題の正答率に比べ、その意味理解を問うサブクラスgの問題の正答率は非常に低くなっている。このことは、計算手続きを習得できていても、意味を理解せずに手続きの暗記だけに頼っている学習者が多く存在することを示唆している。実際、サブクラスaでは、概念誤りや未完了の率が上がっていることも表5のデータからもみてとれ、手続きの意味を理解していないために習得が困難となっている学習者の存在も示唆される。

クラスBのサブクラスeは、線形代数の後期の授業範囲に属する、重要な抽象概念の理解を必要とする計算手続きに関する問題を多く含んでいるが、これらの概念理解に関する問題は同じクラスBのサブクラスg, hに属している。このことは、サブクラスeの問題に関しては、概念理解と計算手続きの習得とが連動していることを示している。したがって、これらの問題に関して概念理解のつまずきが計算手続きの習得を困難にしていることを示唆している。

クラスBのサブクラスeからは次のような示唆も得られる。サブクラスeには、数ベクトル空間におけるシュミットの直交化法と多項式空間におけるシュミットの直交化法が含まれているが、これらが同じサブクラスに属しているということは、どちらか一つを習得できればもう一方も習得できることを示唆している。一般に、多項式空間はベクトル空間としての抽象度が高く、その習得難易度において数ベクトル空間と大きな差があると考えられているが、シュミットの直交化法については、実際、表5のデータから、数ベクトル空間と多項式空間とで習得難易度に差はなく、数ベクトル空間での理解習得が多項式空間での理解習得につ

ながることが示唆される。

5. 総合的考察

分析(1)から、線形代数の習熟には、

- (i) 基礎的な計算手続きの習得でつまずく、
- (ii) 計算手続きはある程度習得できるが、概念理解が伴わない、
- (iii) 計算手続きをその背後にある数学的理論や概念も含めて理解・習得する

の3つのタイプがあることが明らかにされ、さらに、分析(2)と合わせた分析により、線形代数のつまずき方には、

- (ア) 基礎的な計算手続きの習得でつまずく、
 - (イ) ベクトル空間の抽象的概念の習得でつまずく、
- の2つのタイプがあるという考察が導かれた。

概念理解を伴わない計算手続きの習得のみにとどまる、(ii)のタイプが存在することについては、分析(3)からも、連立1次方程式の解法、逆行列の計算、行列式の計算などの基礎的な計算問題と、その計算の背後にある数学的概念の理解を問う問題とが、学習者の正答誤答の反応データに関して関連性が弱いという結果が得られており、分析(1)、(2)の結果と合わせて、計算手続きの意味を理解せず、形式的な手続きだけを暗記する暗記型の学習者の存在が確かめられたといえる。

また、ベクトル空間の抽象的概念の習得でのつまずきに関しては、分析(3)の結果から、次元や基底に関する問題や、シュミットの直交化法、行列の対角化などの抽象概念に基づく計算問題については、これらの問題と、その計算の背後にある数学的概念の理解を問う問題とが、学習者の正答誤答の反応データに関して関連性が強いという結果が得られており、これらの問題に関して概念理解のつまずきが計算手続きの習得を困難にしていることが確かめられたといえる。

上記の分析結果から、線形代数の指導について、次のような教育的示唆が得られる。

線形代数の標準的な1年間のカリキュラムでは、後半に、次元や基底の求め方や、シュミットの直交化法、行列の対角化など、抽象概念に基づく計算手続きを学ぶ。これらは前半で学ぶ基礎的な計算手続きに比べて習得・定着が難しいものであるが、分析(3)から、これらの抽象概念に基づく計算手続きに関する問題と、基本変形や逆行列の計算、連立1次方程式の掃き出し法による解法など、前半に学ぶ基礎的な計算の意味理解に関する問題とが、同じクラスに属していることから、抽象概念に基づく計算手続きの習得と、概念理解を伴った基礎的な計算手続きの習得とが関連性が高いことがわかる。このことは、基礎的な計算手続きの習

得段階から、形式的な手続きの暗記にとどまらないような教育を行うことが、抽象概念に基づく計算手続き習得のつまずきを減らす上で重要になることを示しているといえる。

シュミットの直交化法は、ベクトルの内積の計算を用いた計算手続きであり、その計算手続きの複雑さから、習得・定着が難しいものの1つとなっている。分析(3)から、実数ベクトル空間において、内積の計算の習得とシュミットの直交化法の習得の間にはギャップがあることがわかり、また、多項式空間の内積と多項式空間のシュミットの直交化法は実数ベクトル空間のシュミットの直交化法と同じサブクラスに属していることから、これらの習得の間にはギャップがないことがわかる。分析(2)からも、実数ベクトル空間においては内積の計算の習得とシュミットの直交化法の習得にはギャップがある一方で、内積の計算とシュミットの直交化法については、実数ベクトル空間での習得が多項式空間での習得につながるという結果が出ている。これらの分析結果は、実数ベクトル空間でのシュミットの直交化法が習得できればもう一方も習得できることを示唆している。一般に、多項式空間はベクトル空間としての抽象度が高く、その習得難易度において数ベクトル空間と大きな差があると考えられているが、シュミットの直交化法については、数ベクトル空間と多項式空間とで習得難易度に差はなく、実数ベクトル空間でのシュミットの直交化法をしっかりと指導することが、より抽象度の高い多項式空間でのシュミットの直交化法の習得につながることをわかる。

参考文献

- [1] 大阪府立大学総合教育研究機構, (2010) “文部科学省「特色ある大学教育支援プログラム」平成19年度採択取組「大学初年次数学教育の再構築」成果報告書”。
- [2] 市原一裕, 芝野雄大, (2010) “大学生における「わかる」の判断基準に関する研究—ゼミ形式の指導を通して—”, 教育実践総合センター研究紀要, Vol. 19, pp. 67-74.
- [3] Dorier, J.-L. ed., (2000) “On the Teaching of Linear Algebra”, Kluwer Academic Publishers.
- [4] 川添充, 岡本真彦, 高橋哲也, (2010) “大学初年次線形代数の理解パターンの分析”, 日本数学教育学会第43回数学教育論文発表会論文集, p.807-812.