図形を用いた演繹的推論の認知プロセス
Cognitive processes of deductive reasoning with diagrams

佐藤 有理，峯島 宏次，竹村 亮，岡田 光弘
Yuri Sato, Koji Mineshima, Ryo Takemura, Mitsuhiro Okada

慶應義塾大学文学部 哲学専攻
Department of Philosophy, Keio University
{sato,minesima,takemura,mitsu}@abelard.flet.keio.ac.jp

Abstract

Syntactic manipulations of diagrammatic representations have played a key role in accounting for efficacy of diagram use in reasoning. Currently, however, little attention has been paid to the cognitive role of diagrams in deductive reasoning with quantified constructions. The present study investigates the cognitive processes of syllogistic reasoning with diagrams, in focussing on the role of logic diagrams in verification and falsification processes.

Keywords — Diagrammatic reasoning; Logic diagram; Deduction; Proof construction

1. はじめに

これまで多くの認知科学的研究によって、図形表現が人間のさまざまな問題解決の場面で効果的であることが明らかにされてきた。この分野の古典的研究としてよく知られるLarkin and Simon[11]では、図形表現は、とりわけ情報の探索や認識の場面において、主として空間的位置表示を利用することができるため、言語表現よりも効果的であることが指摘されている。この見解は広く支持されており、例えば、グラフ理解に関する実験研究（Shah, Mayer, & Hegarty[19]; Zacks & Tversky[28]; 神崎 & 三輪[10]など）では、意味論的には等価であるような複数のグラフ表現を比較することを通して、図形表現の情報伝達における有効性を説得的に示している。また、よく知られた三囚人問題におけるルーレット表現（Ichikawa[7]参照）による確率理解促進についてのYamagishi[26]の研究も、同様の見解を支持するものと理解できる。

他方で、Larkin and Simon[11]は、情報の探索や認識の場面とは異なり、推論の場面では、図形表現の有効性は限定的なものにとどまると主張している。その背景には、推論プロセスとは、もっぱら表現の意味論的内容に依存し、表現の仕方とは独立である、という考え方がある。この伝統的見解に対して、近年、動的な推論プロセスにおける図形表現の効果を探究する試みも存在する。例えば、Shimojima and Fukaya[22]、Shimojima and Katagiri[23]では、視線追尾装置を用いて、推移的推論において図形の心的操作が一定の役割を果たしていることを説得的に論じている。また、Bauer and Johnson-Laird[1]の研究は、選言を伴う演繹推論において図形が効果的であることを論じている。しかし、これら従来の研究の焦点は、推移的関係や選言といった比較的単純な論理的操作にあり、量化や否定を含むような、より複雑な演繹的推論における図形表現の認知的役割は十分に検討されていないのが現状である。もちろん、記号論理学の入門的テキストにおいては、オイラー図やヴェン図といったさまざまな論理図形が利用されてきたが、その役割は、主として量化構造をもつ論理式の理解の補助という限定的なものであり、証明や反証といった動的な推論プロセスを代替する手段として論理図形が導入されることはまれである。こうした論理図形は、Shin[24]によるヴェン図の研究以降、数理論理学の手法を用いて急速に形式化が進み、さまざまな図形推論系に対して、完全性や決定可能性のような論理的性質が明らかにされつつある（Howse, Stapleton, & Taylor[6]など）。しかし、こうした一連の論理学的研究は、認知科学で蓄積された研究とはほぼ独立に行われる傾向があり、さまざまに拡張された図形表現系が実際の利用者にとってどのような有効性をもつのかについてはほとんど明らかになっていない。

Sato, Mineshima, and Takemura[17][18]では、この溝を埋めるため、量化文を含む演繹的推論としてもっとも基本的な三段論法推論をケース・スタディとしてとりあげ、論理図形の有効性を検討した。そこでは、Mineshima, Okada, and Takemura[13][14]による一連のオイラー図とヴェン図の証明論的研究で導入された図形表現系に依拠して、図形を介する演繹推論の認知モデルを提示するとともに、行動実験に基づいて、いくつかのタイプの図形表現の有効性を検討した。本研究は、Sato et al.[18]のモデルに基づいて、演繹推論における「証明」と「反証」という二つの推論プロセスの区別に注目して論理図形表現の認知的役割を掘り下げて考察することを目的とする。本稿では、演繹推論において、特定の結論が前提から導かれること、つまり妥当性を判断するプロセスを「証明」といい、ある結論が前提から導かれないこと、つまり非妥当性を判断するプロセスを反証という。反証を行うためには、探し出すべき結論に該当する情報がないという判断を下す必要があり、これが、特に

自然言語に基づく推論ではしばしば困難な課題であることはよく知られている。Sato et al.[17][18]の研究は、反証プロセスにおいても、あるタイプの論理図形が有効であることを示しているが、その背後にあるメカニズムについてはいまだ十分に検討されていない。そこで本研究では、特に反証（非妥当性の判断）における図形の認知的役割に焦点を当てたい。

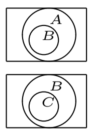
2. 図形推論における証明と反証

まず、Sato et al.[18]における外的に与えられた図形を用いた演繹推論の認知モデルを概観する。このモデルでは、演繹推論における図形の有効性として、文解釈に関する有効性と推論に関する有効性の二つが区別される。文解釈に関する有効性とは、外的に与えられた図形表現を参照することで、推論の前提や結論に現れる文の正しい解釈を固定することが可能となり、それゆえ誤解釈による推論エラーを回避することが可能となるという効果のことを指す。推論における有効性とは、実際の推論プロセスが図形表現の具体的操作（図形による証明構成）によって代替される、つまり、図を構文論的対象と見立て、その操作によって結論を導くことが可能となるという効果のことを意味する。

Sato et al.[17][18]の主たる目的は、推論に関する有効性が実際の演繹課題を解く際に現れるかどうかを検証することであった。この目的のため、Fig. 1のように前提文とそれに対応するさまざまな外的図形表現が与えられた場合の三段論法推論のパフォーマンスを比較する実験が行われた。[1]

すべてのBはAである

すべてのCはBである



（それゆえ、すべてのAはBである）

Fig. 1. 図を用いた演繹推論課題の一例（オイラー図）

この実験では、事前知識による影響を避け、また図形の文解釈に関する効果と推論に関する効果を区別するために、オイラー図やヴェン図のような外的表現については、被験者にその基本的な意味（真理条件）について十分な教示が与えられ、解釈上の効果が生じるように設定されている（なおプレテストの実施によって被験者がそれぞれの表現系を理解していることの確認を行った）。一方で推論過程での外的表現の操作方法や妥当性判定のストラテジーについては、被験者に教示を与えなかった。対照条件として文解釈にのみ有効な集合論的表記に基づく記号表現を用いることで、もし外的に与えられた図形表現の推論課題の成績が記号表現の課題の成績よりも良ければ、その外的表現の推論上の効果が示されたことになる。実験の結果、各課題で与えられたオイラー図[2]とヴェン図は、同等の意味論的情報を持つにも関わらず、集合論的表記を用いた推論課題よりも正当率が有意に高いという結果を得た。この結果は、オイラー図・ヴェン図を用いた推論では、被験者は、(1) 図の意味論的情報を文解釈の段階で利用するだけではなく、(2) 図を構文論的対象とみなし、妥当な結論を導くプロセスを図の具体的な操作（図形による証明構成）として実現していることを示唆している（詳細は、Sato et al.[17][18]を参照）。

以上をふまえて、以下では、より詳細に演繹推論のタイプごとの分析を行う。特に推論の妥当性判断の場面と非妥当性判断の場面を区別し、それぞれのタイプの推論を支える図形の特性がどんなものであるのかを考察しよう。

まずできるだけ問題を単純化するため、オイラー図を用いた普遍量化文を伴う三段論法推論の解法を例として考察を始める。オイラー図を用いて妥当な結論を得るプロセスを、Fig. 2に示す。

D_1：すべてのAはBである

D_2：どのCもBでない

それゆえ、どのCもAでない

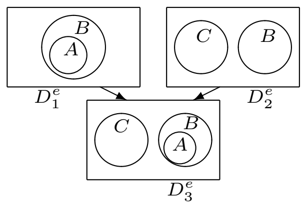


Fig. 2. オイラー図を用いた三段論法推論の妥当性判定

ここで、前提「すべてのAはBである」はD_1^eで表現され、前提「どのCもBでない」はD_2^eで表現される。D_1^eとD_2^eを合成することによって、D_3^eを得ることができる。D_3^eでは、排他関係が円Aと円Cに成り立っており、この図から、妥当な結論「どのCもAでない」を抽出することができる。ここでのポイントは、前提においてふたつの図形を合成し、円同士の空間的関係を観察することのみによって、結論に該当する新しい情報を読み取ることができるという点である。円AとCの間に成り立つ排他関係は、いわば合成操作の副産物として自動的に得られるものである。Shimojima[20][21]は、このように図形操作によって自動的に得られる情報をFree-rideと呼び、この特性が推論や問題解決における図形使用の様々な場面において見いだされることを指摘した。

一般に、演繹推論とは、複数の前提に既に含まれている情報を統合し、結論に該当する情報を明示的に抽出するプロセスである。Fig. 2に示され

[1] 三段論法課題において、オイラー図やヴェン図が文解釈に関する効果を有することは、Mineshima, Okada, Sato, and Takamura[12] などの実験において示されている。

[2] 正確には、オイラー表現系のひとつであるEUL図を使用した。心理学研究でよく知られるオイラー表現系との違いについて、詳しくは本稿第3節を参照のこと。

るような図形の合成操作は、この情報の統合と抽出を外的に代替する手段に他ならない。一般に、オイラー図のような図形表現が推論における妥当性判定を容易にするのは、このFree-ride特性に拠るものと考えることができる。

次に、オイラー図を用いて三段論法推論の非妥当性を示すFig. 3のプロセスを考えてみよう。

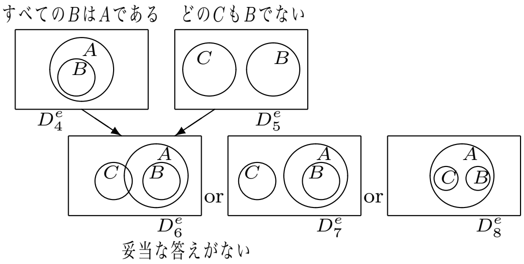


Fig. 3. オイラー図を用いた推論の非妥当性判断

この場合、前提にそれぞれ対応するD_4^eとD_5^eを合成しようとしても、円の組み合わせ方がただ一つに決まらず、D_6^e、D_7^e、D_8^eと図を列挙することになる。この三つの合成図全てにおいて成り立つAとCの意味論的関係は存在しないため、この推論には「妥当な結論がない」ということがわかる。円Aと円Cの関係をひとつに決めざるを得ないという特性は、Shimojima[20][21]が指摘する図のOver-specificity特性の一例だとみなすことができるだろう（図形のもつspecificity特性については、Stenning and Oberlander[25]も参照のこと）。こうしたOver-specificity特性はしばしば推論において不利に働くことが知られているが、推論の非妥当性の判定という局面においては、むしろOver-specifityはポジティブに機能し、「妥当な結論がない」という情報を得るのに積極的に貢献していると言えるだろう。

3. 図形表現系の拡張

前節の説明で使用したオイラー図は、伝統的に使用されてきたオイラー図表現系のひとつである。しかし、この表現系は、普遍量化文を表すのには適しているが、後述するように、存在文を表すのに不適であることが知られている。より複雑な演繹的推論を扱うには、もはやこの伝統的なオイラー表現系では対応できなくなってしまう。そこで本節では、より広範囲の演繹を扱うため、伝統的なオイラー図に対する拡張や修正の試みについて触れる。

数学者のL. オイラーはドイツ王女への手紙[4]の中で、三段論法推論や量化文を表現するための図形表現系の原案を複数提案しており、前節のオイラー図は、そのようなオイラー表現系のひとつである。この表現系をここでは、Gergonne表現系[5]と呼ぶ（詳細は、Sato, Mineshima, & Takemura[17]参照）。この表現系は、論理学研究よりはむしろ三段論法推論の心理学研究においてよく知られている（例えば、Erickson[3]）。このシステムは、(i) 図形は、円だけから成り立ち、(ii) 図形のどの最小領域においても対象の存在を仮定する、という特徴を持つ。その帰結として、三段論法における一つの量化文を表現するために、複数の図が必要となる。例えば、「あるAはBでない」という文は、Fig. 4において示されているように、D_1、D_2、D_3の三つの図の選言によって表現されることになる。同様に、「あるAはBである」という文は、四つの図が必要になる。このため、三段論法推論において二つの前提文を合成する際には、前提に対応する図同士の組み合わせ方を12通り考えなくてはならないことになる（こうした批判として、例えば、Johnson-Larid[8]の第4章を参照）。Gergonne表現系は、円同士の空間的関係にのみ基づいているという点で、理解しやすい図形ではあるが、上記の問題のため、存在命題を伴うような実際の三段論法的推論ではひどく扱いずらい図形表現であることが分かる。

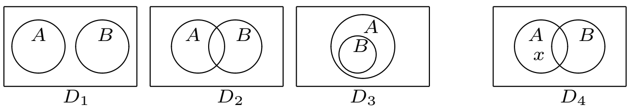


Fig. 4. 「あるAはBでない」に対応するGergonne図(D_1, D_2, D_3) とEUL図(D_4)

Gergonne図のこのような難点を克服するため、多くの試みがなされてきた。Mineshima, Okada, and Takemura[13][14]では、できるかぎりシンプルでかつ三段論法を扱うのに十分な表現力をもつオイラー図表現系として、EUL表現系が提案されている。このシステムでは、(i) 点“x”によって対象の存在を示し、(ii) 円の交差（Fig. 4のD_2における円の関係）によって「二つの円の意味論的関係が決まらない」という情報を表すことで、それぞれの量化文をひとつの図に対応づけることが可能となる。例えば、「あるAはBでない」という存在文は、Fig. 4のD_4で表現される。円の交差を利用することにより、EUL図は、Gergonne図におけるような組み合わせ爆発を避けることができる（より詳しくは次節の議論も参照）。なおEUL図は、Gergonne図と同様に、円同士の空間的関係（包含関係と排他関係）によって普遍量化文を表現する。例えば、「すべてのAはBである」という文を、EUL表現系では、Fig. 5の図D_5によって表現する。

オイラー図と同様よく知られている論理図形としてヴェン図がある（歴史的にはJ. Venn[27]によって考案され、C. Peirce[15]によりさらに拡張・修正された）。ヴェン図では、すべての円が互いに交差するような図が、基本図として固定され、その基

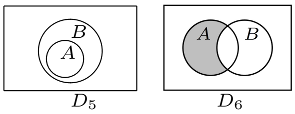


Fig. 5. 「すべてのAはBである」に対応するオイラー図(D_5)とヴェン図(D_6)

本図は円の間のいかなる特定の意味論的関係も表現しないものとされる（つまり、基本図は意味論的にはトートロジーを表す)。これを基に、ヴェン図では、例えば「すべてのA はBである」という文は、「AであってBでないものはない」とパラフレーズされ、Fig. 5のD_6のように表現される。ここで円が表す集合間の意味論的関係は、円同士の空間的関係ではなく、影（shading）を用いて空な領域を指定することによって表現される。

EUL表現系は、円の空間的配置を利用する従来のオイラー表現系と「円の交差」についてのヴェン図の規約を組み合わせた体系とみなすことができる。空集合を表す影に関する規約を採用していない点で、EUL図は、ヴェン図よりもより少ない規約によって三段論法を表現することが可能になる。

4. 部分情報を表す図を用いた演繹推論

前節で導入したEUL図を使用することによって、2節における伝統的オイラー図を用いた推論とは異なる仕方で図的推論プロセスを捉えることが可能となる。本節では、存在命題を含む三段論法推論を例として、証明（妥当性判定）と反証（非妥当性判定）という観点から、図形推論の理想的な認知プロセスを考察し、それによって明らかとなる図形特性についての検討を行う。

まず、存在命題を含む三段論法推論において、EUL図を用いて推論の妥当性をどのように示すことができるのか、Fig. 6のプロセスをもとに考えてみよう。

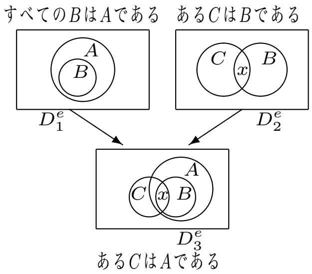


Fig. 6. EUL図を用いた推論の妥当性判定

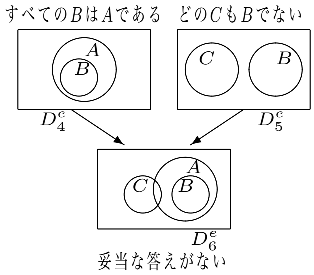


Fig. 7. EUL図を用いた推論の非妥当性判定

ここで、前提「すべてのBはAである」はD_1^eで表現され、前提「あるCはBである」はD_2^eで表現される。そして、D_1^eとD_2^e を合成しようとすると、円Cと円Aの意味論的関係はただ一つに決まらないので、円の交差を用いた合成図D_3^eとして表現することになる。この図で、円Cと円Aの共通部分に点xが付いているので、妥当な結論「あるCはAである」を抽出することができる。

同様に、EUL図を用いた三段論法推論において、推論が非妥当であることを示すFig. 7のプロセスを考えることができる。ここでも、D_4^eとD_5^eの合成図において、円の交差を用いることによって、円Cと円Aが表す集合の意味論的関係がただ一つに決まらないことが表現されている。この合成図D_6^eからCとAの意味論的関係について抽出することのできるポジティブな情報はないので、いわばメタ的情報として、この推論には「妥当な答えがない」という結論を引き出すことができる。つまり、円の交差によって、「問題となっている意味論的関係を与えられた前提から決めることはできない」という部分情報(partial information)を図形的に表現することが可能になり、これにより、Gergonne図のときのように「合成の失敗」(Fig. 3参照）ではなく、むしろ「合成の成功」によって非妥当性判断が行われるようになっている。

Sato et al. [18]の実験結果は、この種の推論課題におけるEUL図の有効性を示唆している。しかし、これらEUL図を用いた図形推論では、Fig. 3のような、合成図を枚挙することによって反例探索を行うようなプロセスは行われない。したがって、この場合、非妥当性の判断は、図形表現のOver-specificity特性に基づいてなされると考えることはできない。むしろ、EUL図では、前提図の合成によって「円の交差」関係が新たに生じるという点で、非妥当性の判定もまた、Free ride特性の一種に基づいて可能になると考えられる。ただし、Fig. 6の場合は、点xが円Aの内側にあるという関係が自然な空間的制約（より具体的には、円と点の包含関係に関する推移性）から生じるのに対し、Fig. 7の場合、部分情報を扱うために導入された構文論的規約に基づいて、円の交差関係が新たに加えられる。このため、前者の通常のFree rideの場合は、幾何学的制約に基づいてほぼ自動的に円の関係を決定することができるのに対して、後者の円の交差の場合、特定の規約を参照するため、「互いに交差させる」という操作を意識的に行う必要があり、通常のFree rideよりは労力がかかると予想される。

本稿の最後に、非妥当性判定（反証）に関して、(1)EUL表現系による図形推論、(2) 自然言語ないし形式言語の記号表現に基づく言語的推論、(3) メンタルモデルによる反例構築に基づく推論の違いを指摘しておきたい。図形表現系をその表現力に応じて分類し、言語的推論との体系的比較を行った古典的研究であるStenning and Oberlander[25] は、主として意味論的（モデル論的）観点からオイラー図による推論と言語的演繹推論のメンタルモデル

による推論（Johnson-Laird & Byrne [9]）との比較を与えたが、本稿ではこれとは異なる証明論的視点から両者の比較を試みたい。

ここで我々が注目するのは、EUL図を用いた推論では、妥当性を示す場合と同様に、非妥当性を示す場合においても、「円の交差」を用いることによって一枚の合成図を構成し、証明を行うことができるという点である。これは、通常の言語的演繹推論について、特に証明論的観点から説明を試みるモデルとは大きく異なる。ここで証明論的観点とは、論理に対する一つの考え方であり、一般に、論理的帰結関係を証明の構成可能性概念により捉え、構文論的規則に従って前提を操作し変形することによって、前提の中に結論に該当する情報が含まれているかどうかを確かめる。この立場の認知理論として代表的なものに、メンタルロジック理論と呼ばれるモデルがあり、三段論法推論や述語論理で扱える範囲の推論についてはBraine[2]やRips[16]の研究がある。通常、これらの証明戦略を（自然言語ないし形式言語における）記号表現に基づく言語的推論において採用した場合、推論の非妥当性は、証明構成が不可能であること、つまり、どの構文論的規則を適用しても前提情報から結論情報への書き換えができないことによって示される。したがって、証明戦略によって推論の非妥当性を示すことは不可能ではないが、通常非常に困難となる。このような記号表現に基づく演繹推論の場合とは異なり、EUL図を用いた図的推論では、非妥当性の判定を、上述のように図形による証明構成によって行うことができるという点で特徴的である。

また、論理学におけるモデル論的枠組み、及び、メンタルモデル理論の枠組み（Johnson-Laird [8]）では、具体的な反例モデルを構築することで、推論の非妥当性が示される（与えられた推論に対して、証明可能性と反例モデルの構築可能性のいずれか一方が成立することは、論理体系に対する完全性によって保証される）。EUL図を用いた図的推論における反証プロセスは、こうした反例モデルの構築とも異なるプロセスである点に注意が必要である。その詳細は別の機会に譲らざるをえないが、EUL図を用いた場合、反例モデルは（典型的には円の交差を伴う）結論図から、円や点に対する意味論的値の付与というさらなるステップを経て構築されるものであり、これは円の合成プロセスの次の段階に位置するプロセスとして理解することができる。EULのように部分情報を扱うことのできる図形演繹系には、証明（妥当性判定）および反証（非妥当性判定）は、図形の構文論的操作という一元化されたプロセスとして実現することができるという大きな特徴がある。

5. まとめ

本研究の目的は、演繹的推論における論理図の認知的役割をめぐる先行研究の知見を整理し、それがさらに複雑な演繹推論となった場合の認知プロセスについて理論的に考察することであった。本研究の結論をまとめると、次のようになる。

1. 普遍量化文のみを含むような比較的単純な演繹的推論において伝統的オイラー図が果たす有用性は、図形のFree-ride特性（妥当性判断の場合）、及び、Over-specificity特性（非妥当性判断の場合）によって説明することができる。
2. 伝統的なオイラー図に対して修正を施したEUL図では、部分情報を図形的に表現することが可能となる。これにより、推論の妥当性判定および非妥当性判定を図形の合成操作という一元的プロセスとして実現することが可能となる。この枠組みは、特に、非妥当性の判定プロセスに関して、記号表現に基づく言語推論およびモデル的な推論の認知モデルには見られない特徴を備えている。

本研究が示した認知モデルは、更なる分析により、実際の運用レベルでは幾分異なってくる可能性は十分にある。今後の課題として、実験結果との照合を通して検討を重ねていく必要がある。

謝辞

本研究は、日本学術振興会特別研究員奨励費（課題番号21・7353）及び、慶應義塾大学グローバルCOEプログラム「論理と感性の先端的教育研究拠点」（人文科学 D09）からの支援を受けた。

参考文献

[1] Bauer, M. & Johnson-Laird, P. N. (1993). How diagrams can improve reasoning. *Psychology Science*, 4(6), 372-378.

[2] Braine, M.D.S. (1998). Steps toward a mental-predicate logic. In M.D.S. Braine & D.P. O'Brien (Eds.) *Mental logic* (pp. 273-331), Mahwah, NJ.: Erlbaum.

[3] Erickson, J.R. (1974). A set analysis theory of behavior in formal syllogistic reasoning tasks. In R. Solso (Ed.), *Loyola symposium on cognition (Vol. 2)*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

[4] Euler, L. (1768). *Lettres à une Princesse d'Allemagne sur Divers Sujets de Physique et de Philosophie.* Saint-Pétersbourg: De l'Académie des Sciences.

[5] Gergonne, J. D. (1817). Essai de dialectique rationelle. *Annuales de Mathematiques pures et appliqukes*, 7, 189-228.

[6] Howse, J., Stapleton, G., & Taylor, J. (2005). Spider diagrams. *LMS Journal of Computation and Mathematics*, 8, 145-194.

[7] Ichikawa, S. (1989). The role of isomorphic schematic representation in the comprehension of counterintuitive Bayesian problems. *Journal of Mathematical Behavior*, 8, 261-181.

[8] Johnson-Laird, P. N. (1983). *Mental Models : Towards a cognitive science of language, inference, and consciousness.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

[9] Johnson-Laird, P.N., & Byrne, R. (1991). *Deduction.* Hillsdale, NJ: Erlbaum.

[10] 神崎奈奈 & 三輪和久. (2010). 図的表現からの情報の読み取りに表現と文脈が及ぼす影響の実験的検討. 日本認知科学会第27回大会論文集 (pp. 160-167).

[11] Larkin, J. & Simon, H. (1987). Why a diagram is (sometimes) worth 10,000 words. *Cognitive Science*, 11, 65-99.

[12] Mineshima, K., Okada, M., Sato, Y & Takemura, R. (2008). Diagrammatic reasoning system with Euler circles: theory and experiment design. In *Proceedings of Diagrams 2008*, *LNAI 5223* (pp.188-205), Springer.

[13] Mineshima, K., Okada, M., & Takemura, R. (2010). Two types of diagrammatic inference systems: Natural deduction style and resolution style. In *Proceedings of Diagrams 2010*, *LNAI 6170*, (pp. 99-114), Springer.

[14] Mineshima, K., Okada, M., & Takemura, R. (in press). A diagrammatic reasoning system with Euler circles. *Journal of Logic, Language and Information.*

[15] Peirce, C.S. (1897/1933). *Collected Papers IV.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

[16] Rips, L.J. *The Psychology of Proof: Deductive Reasoning in Human Thinking.* Cambridge, MA: MIT Press

[17] Sato, Y., Mineshima, K., & Takemura, R. (2010a). The efficacy of Euler and Venn diagrams in deductive reasoning: Empirical findings. In *Proceedings of Diagrams 2010*, *LNAI 6170*, (pp. 6-22), Springer.

[18] Sato, Y., Mineshima, K., & Takemura, R. (2010b). Constructing internal diagrammatic proofs from external logic diagrams. In *Proceedings of the 32nd Annual Conference of the Cognitive Science Society* (pp. 2668-2673).

[19] Shah, P., Mayer, R., & Hegarty, M. (1999). Graphs as aids to knowledge construction: Signaling techniques for guiding the process of graph comprehension. *Journal of Educational Psychology*, 91(4), 690-702.

[20] Shimojima, A. (1996a). Operational constraints in diagrammatic reasoning. In G. Allwein, & J. Barwise (Eds.) *Logical Reasoning with Diagrams* (pp. 27-48), New York: Oxford University Press.

[21] Shimojima, A. (1996b). *On the Efficacy of Representation.* PhD thesis, Indiana University.

[22] Shimojima, A. & Fukaya, T. (2003). Do we really reason about a picture the referent. In *Proceedings of the 25th Annual Conference of the Cognitive Science Society* (pp. 1076-1081).

[23] Shimojima, A. & Katagiri, Y. (2008). Hypothetical drawing in embodied spatial reasoning. In *Proceedings of the 30th Annual Conference of the Cognitive Science Society* (pp. 2247-2252).

[24] Shin, S.-J.(1994). *The Logical Status of Diagrams.* New York: Cambridge University Press.

[25] Stenning, K., & Oberlander, J. (1995). A cognitive theory of graphical and linguistic reasoning. *Cognitive Science*, 19, 97-140.

[26] Yamagishi, K. (2003). Facilitating normative judgments of conditional probability: Frequency or nested sets? *Experimental Psychology*, 50, 97-106.

[27] Venn, J. (1881). *Symbolic Logic.* London: Macmillan.

[28] Zacks, J. & Tversky, B. (1999). Bars and lines: A study of graphic communication. *Memory & Cognition*, 27(6), 1073-1079.